

Perfectly Matched Layer の最適化に関する研究
－ 2次元音場について－

関西大学 環境都市工学部 建築学科
建築環境工学第一研究室
建 22-58 中西 良志
指導教官 豊田 政弘 教授

目次

1. はじめに	
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
2. 計算方法	
2.1 時間領域有限差分法 (FDTD 法)	3
2.2 Perfectly Matched Layer の定式化	7
2.3 既往研究	10
3. 計算条件	11
4. 評価方法	
4.1 ピーク音圧比	12
4.2 変数の範囲	15
4.3 変数の有効数字	16
5. 結果	
5.1 層数	17
5.2 テーパー乗数	19
5.3 減衰係数最大値	21
6. 一般化	33
7. 考察とまとめ	35

1. はじめに

1.1 研究背景

1950年頃のコンピュータ時代の幕開けを受けて波動音響解析が登場した[1]。代表的な解法としては有限差分法 (Finite Difference Method: FDM)、有限要素法 (Finite Element Method: FEM)、境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) が挙げられる。本研究で使用する有限時間差分法 (Finite Difference Time Domain 法: FDTD 法) は FDM の一種である。開発から時が経ち、現在に至っても、FDTD 法を用いた様々な研究が行われている。その中でも、開領域の計算を実現するための Perfectly Matched Layer (PML) の研究は音響分野のみならず、様々な分野で検討が進められてきた。しかし、PML の性能を決定する要素であるいくつかの定数は経験的に決められることが多く、その効果を十分に発揮できていない可能性がある。開領域における計算をより正確に行うためには PML の性能を最大限に発揮することが不可欠である。

1.2 研究目的

前節で述べたことを踏まえ、PML を用いた FDTD 法の開領域計算をより正確なものにするために、PML の性能を決定する要素である層数、テーパ乗数、減衰係数最大値の最適値を探索し、それらの関係性を求めることで、より反射の少ない PML を作成すること、また、日比野[2]によって提案された 3 次元音場における最適条件が、2 次元音場でも適当か定かではないため、それを検証することを本研究の目的とする。

2. 計算方法

2.1 時間領域有限差分法 (FDTD 法)

FDTD 法は、K. S. Yee [3] によって電磁波の支配式であるマクスウェル方程式を解くことを目的に開発された数値解析手法の一種であり、スタガードグリッドとリープフロッグアルゴリズムを用いた時間領域の有限差分法のことをいう [1]。FDTD 法を用いた音場解析の支配式として運動方程式と連続方程式を考える。密度を ρ 、音圧を p 、空気粒子の x, y, z 方向の変位をそれぞれ u_x, u_y, u_z とすると、 x, y, z 方向の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.3)$$

となる。また、体積弾性率を κ 、変位ベクトルを $u = (u_x, u_y, u_z)$ とすると連続方程式は

$$p = -\kappa \nabla u = -\kappa \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

となる。リープフロッグアルゴリズムを適用するためには、式(2.1)~(2.4)を一階の偏微分方程式に変形する必要がある。そこで、 x, y, z 方向の粒子速度をそれぞれ v_x, v_y, v_z とすると、式(2.1)~(2.4)の方程式は

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

と変形される。FDTD法の離散化は、1次元音場を考えると、図2.1のように表される。図の横方向は空間的变化を表しており、音圧が定義される空間を実線で表している。図中の丸が音圧参照点であり、 x 方向に隣り合う参照点間の距離が空間離散化幅 Δx となる。図の縦方向は時間的变化を表しており、時間離散化幅を Δt とする。粒子速度は、音圧の参照点から $\Delta x/2$ 、 $\Delta t/2$ だけずらした点に定義する。また、 x 方向に関して何番目の音圧参照点であるかを、 i を用いて表す。この i を空間ステップと呼ぶ。同様に、何番目の時間参照点であるかを、 n を用いて表す。この n を時間ステップと呼ぶ。このような、空間的にも時間的にも音圧と粒子速度の参照点を互い違いに配置した格子をスタガードグリッドと呼び、時間的に半ステップ前と1ステップ前の音圧と粒子速度分布がわかれば、現在のステップの分布を求めることが可能となる。

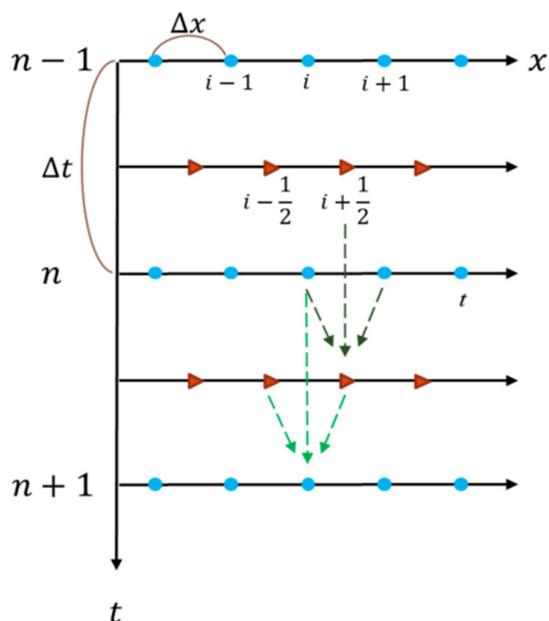


図 2.1 スタガードグリッド (1次元音場)

次に、3次元音場について、時間方向の離散化の表現を省略した参照点の分布を図2.2に示す。これをYeeセルと呼ぶ。1次元音場の場合と同様に、 x 方向に加えて、 y, z 方向に関して何番目の音圧参照点であるかを、それぞれ i, j, k を用いて表す。図中の丸は音圧参照点であり、三角錐は x, y, z 方向のそれぞれの粒子速度である。また、空間ステップが i, j, k で時間ステップが n の音圧を $p^n(i, j, k)$ 、空間ステップが $i+0.5, j, k$ で時間ステップが $n+0.5$ の x 方向粒子速度を $v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k)$ などと表記する。

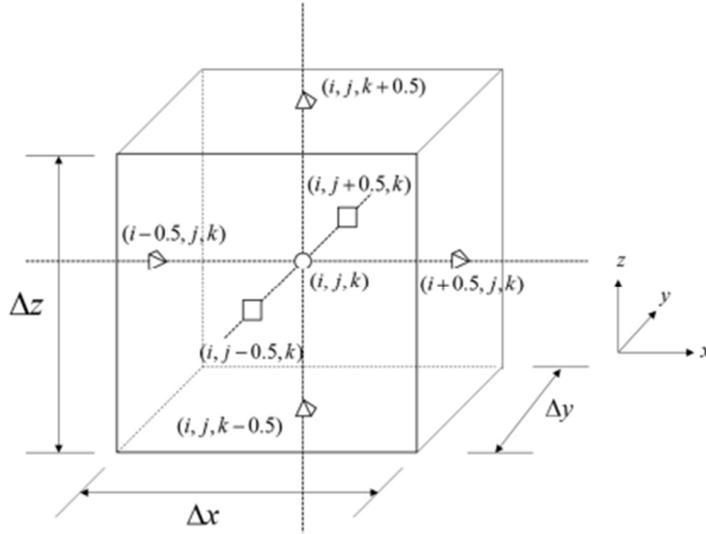


図 2.2 Yee セル(三次元音場)

上記の離散化に伴い、式(2.5)~(2.8)を中心差分近似すると次式が得られる。

$$\rho \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n-0.5}(i+0.5, j, k)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i+1, j, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n-0.5}(i, j+0.5, k)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i, j+1, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta y} \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n-0.5}(i, j, k+0.5)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i, j, k+1) - p^n(i, j, k)}{\Delta z} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p^{n+1}(i, j, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta t} \\ &= -\kappa \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j, k)}{\Delta x} \\ & \quad - \kappa \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5, k)}{\Delta y} \\ & \quad - \kappa \frac{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n+0.5}(i, j, k-0.5)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

式(2.9)~(2.12)を、最も時間ステップが大きい項のみを左辺に残すような形に変形すると、

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) = v_x^{n-0.5}(i+0.5, j, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p^n(i+1, j, k) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.13)$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) = v_y^{n-0.5}(i, j+0.5, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \{p^n(i, j+1, k) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.14)$$

$$v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) = v_z^{n-0.5}(i, j, k+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta z} \{p^n(i, j, k+1) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1}(i, j, k) = & p^n(i, j, k) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j, k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5, k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta z} \{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n+0.5}(i, j, k-0.5)\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となり、これらを用いることで逐次的にすべての参照点の音圧と粒子速度を求めることができる。

2.2 Perfectly Matched Layer の定式化

FDTD 法は解析領域が有限な領域（閉領域）であるので、開領域である自由空間を直接的に取り扱うことはできない。そこで考案されたのが PML である。PML とは、解析領域である空気領域と解析領域外である吸音層の特性インピーダンスが周波数、入射角度に関係なく一致する仮想的な媒質のことである。この吸音層の中で音波を減衰させつつ、伝搬させることで、PML の端部による反射波が解析領域に戻るまでに音波を十分に低減する。音波伝搬の支配方程式である運動方程式(2.5)~(2.7)に減衰係数 F_x, F_y, F_z をもつ減衰項を追加すると、吸音層での支配式は次式となる。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + F_x v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + F_y v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + F_z v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.19)$$

続いて、 $p = p_x + p_y + p_z$ となるように人工的に p_x と p_y と p_z に分ける。一方、連続方程式(2.8) に仮想的な減衰係数 F'_x, F'_y, F'_z を含む減衰項を追加し、 p_x, p_y, p_z のそれぞれに関する連続方程式を立式すると次式となる。

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + F'_x p_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + F'_y p_y = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial t} + F'_z p_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.22)$$

まず、式(2.17)~(2.22)の中で x 方向に関する式のみを取り出して考える。音速を c とすると、空気中での特性インピーダンスの式は $p_x/v_x = \rho c$ であり、これを変形すると次式になる。

$$p_x = \rho c v_x \quad (2.23)$$

式(2.23)を式(2.17)に代入し、 ρ で割ると、次式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{F_x}{\rho} v_x = -c \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.24)$$

また、式(2.23)を式(2.20)に代入し、 ρc で割ると次式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + F'_x v_x = -c \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.25)$$

式(2.24)と式(2.25)から次式が得られる。

$$F'_x = \frac{F_x}{\rho} \quad (2.26)$$

この式により、 F_x を定めれば F'_x も決定される。 y, z 方向についても同様である。図 2.3 に、二次元音場における PML の設定の概要を示す。

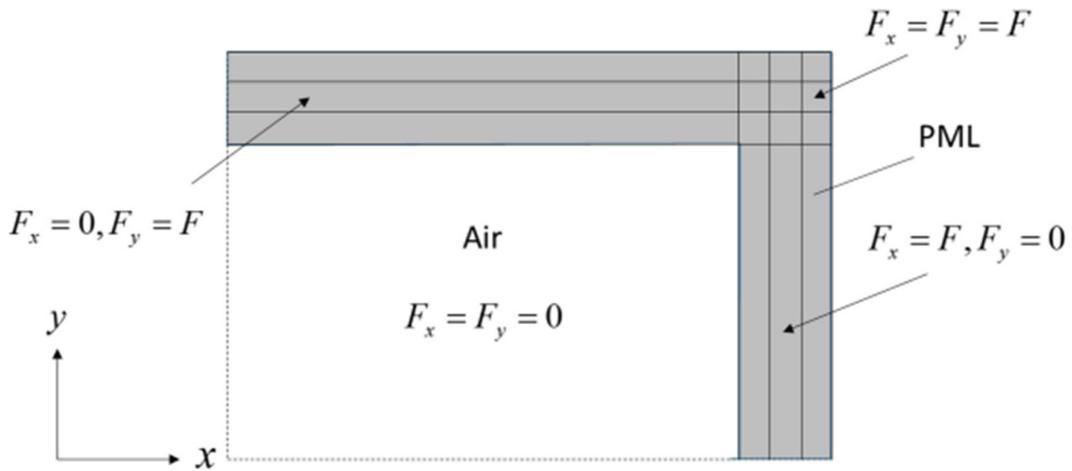


図 2.3 PML の概要

続いて、 x 方向の PML 付近を拡大したものを図 2.4 に示す。急激に F の値を変化させると、離散化した際の不連続性が増すことによって反射が生じる。そのため、 F の x 方向の分布は、図 2.4 のグラフのように、滑らかに増大していくような形にしなければならない。そのような F は次式で表現する。

$$F(x) = F_{max} \left(\frac{x}{L\Delta x} \right)^\tau \quad (2.27)$$

この式は層数 L 、減衰係数最大値 F_{max} 、テーパー乗数 τ の値により決定される。

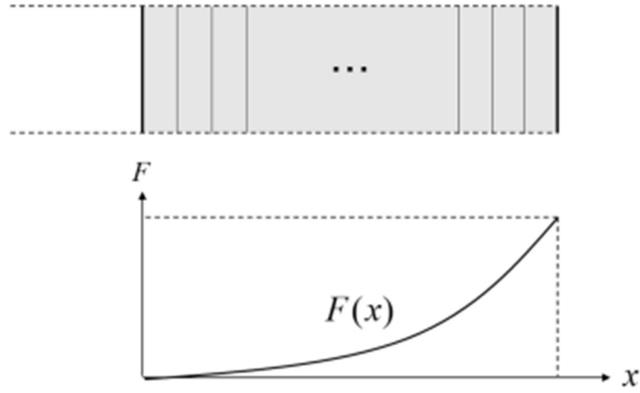


図 2.4 PML の x 方向拡大図

2.3 既往研究

田口による既往研究[4]では、図 2.5 に示すように、階段状に変化する $F(x)$ を与えており、それが原因で PML の性能が十分でなかったと思われる。そこで、日比野による既往研究[2]では、粒子速度参照点の $F(x)$ に前後の音圧参照点の $F(x)$ の平均値を与えることによって、より高性能な PML になるよう修正した。本研究でも、これを採用する。

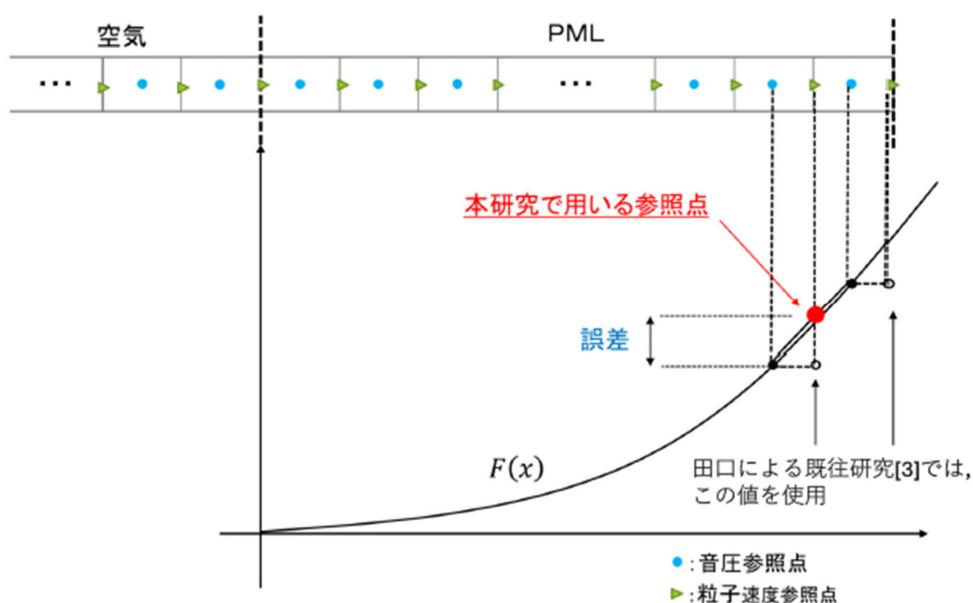


図 2.5 既往研究との違い

これより、層数を多くすればするほど、より高性能な PML になること、減衰係数最大値を変えた場合でも、テーパ乗数が 4.0 のときにピーク音圧比の値が最小になることから、4.0 をテーパ乗数の最適値とし、層数と最適な減衰係数最大値の関係について、最適な最大値を y 、層数を x とすれば、この近似曲線の式は次式で表された。

$$y = 1.1471x^{-0.54} \quad (2.28)$$

3. 計算条件

本研究で対象とする音場として、図 3.1 に示す 2.0 m の正方形の 2 次元音場を考える。音源、受音点はともに図中の丸の位置で x,y 方向に 1.0 m の位置（正方形の中心）である。その他の条件として、空気の密度は 1.200 kg/m^3 、空気の音速は 340 m/s 、音源波形として与えるガウシアンパルスの最大値は $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 、ガウシアンパルスの急峻さを表す係数は 7.0×10^6 、ガウシアンパルスの中心時間は $1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ とする。また FDTD 法の空間離散化幅 Δh は x,y のいずれの方向にも $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、時間離散化幅 Δt は $4.158 \times 10^{-5} \text{ s}$ とする（クーラン数 $c\Delta t / \Delta h$ は $0.7069 \approx 1 / \sqrt{2}$ ）。なお、解析時間は場合により変更するが、初期設定は $2.0 \times 10^{-2} \text{ s}$ とする。この解析領域の外側全体に PML を設置し、受音点での音圧時間応答を観測する。

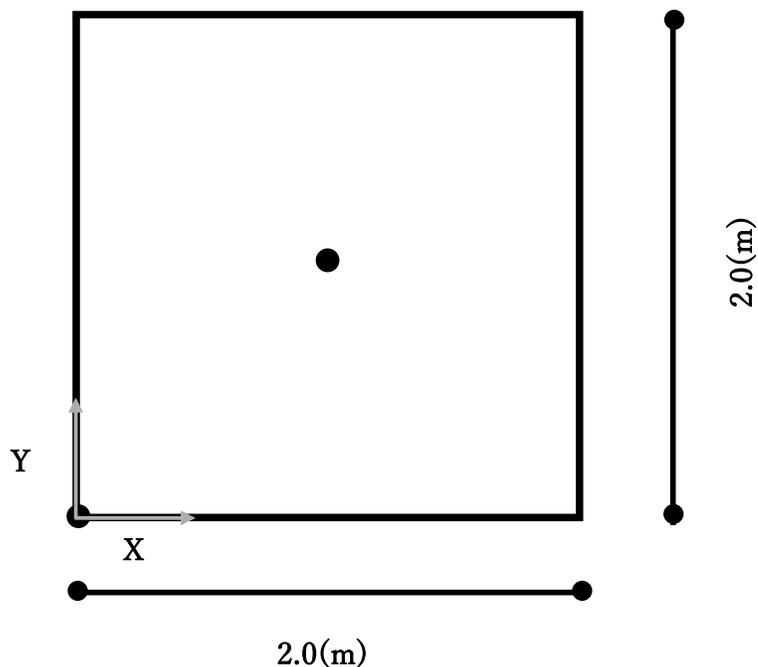


図 3.1 解析領域

4. 評価方法

4.1 ピーク音圧比

前節で示した受音点での音圧時間応答を計算した結果の例を図 4.1 に示す。図 4.1 の①は反射波の音圧であるが、2次元音場では、PML までの距離が近い場合、直接波の振動が十分に減衰する前に反射波が到達してしまう。そのため、図 4.2、図 4.3 で示した、計算空間を直接波と境界からの反射波が時間的に十分分離されるように設定した音場 (20.0 m の正方形を考える。音源、受音点はともに図中の丸の位置で x,y 方向に 10.0 m の位置) の結果と、本研究で対象とする音場の結果との差を取ることで、直接波の影響を除去し、反射波のみを抽出し、その最大音圧を指標として反射の影響を評価する。

直接波の音圧と反射波の音圧のピーク値の比をとることで、直接波に対する反射波の大きさの割合を算出する。これをピーク音圧比と呼ぶこととする。この値が小さいほど音波が反射しておらず、性能の良い PML といえる。PML を決定する要素である層数、テーパ乗数、減衰係数最大値の中の 2 つを固定し、残りの 1 つを変化させ、ピーク音圧比を比較する。

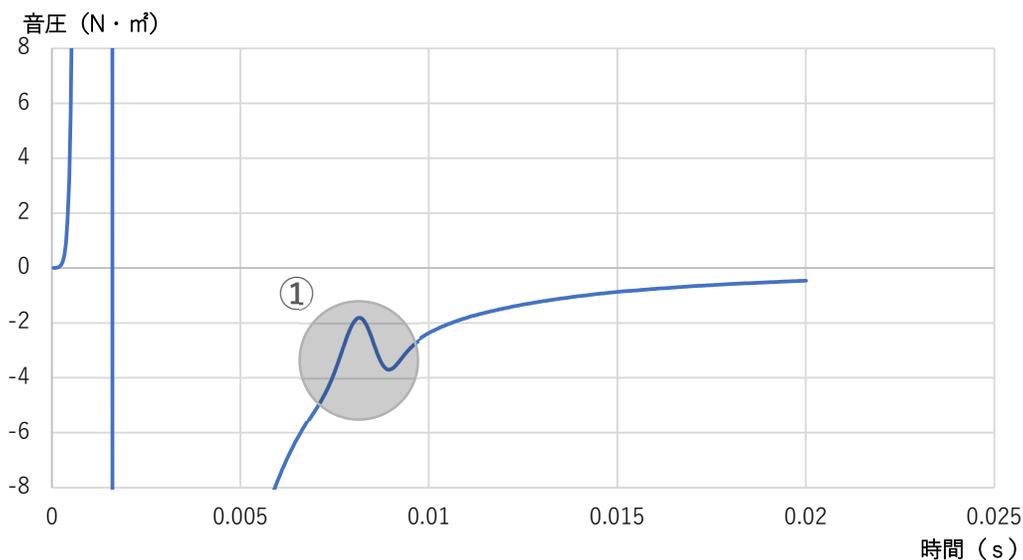


図 4.1 音圧時間応答

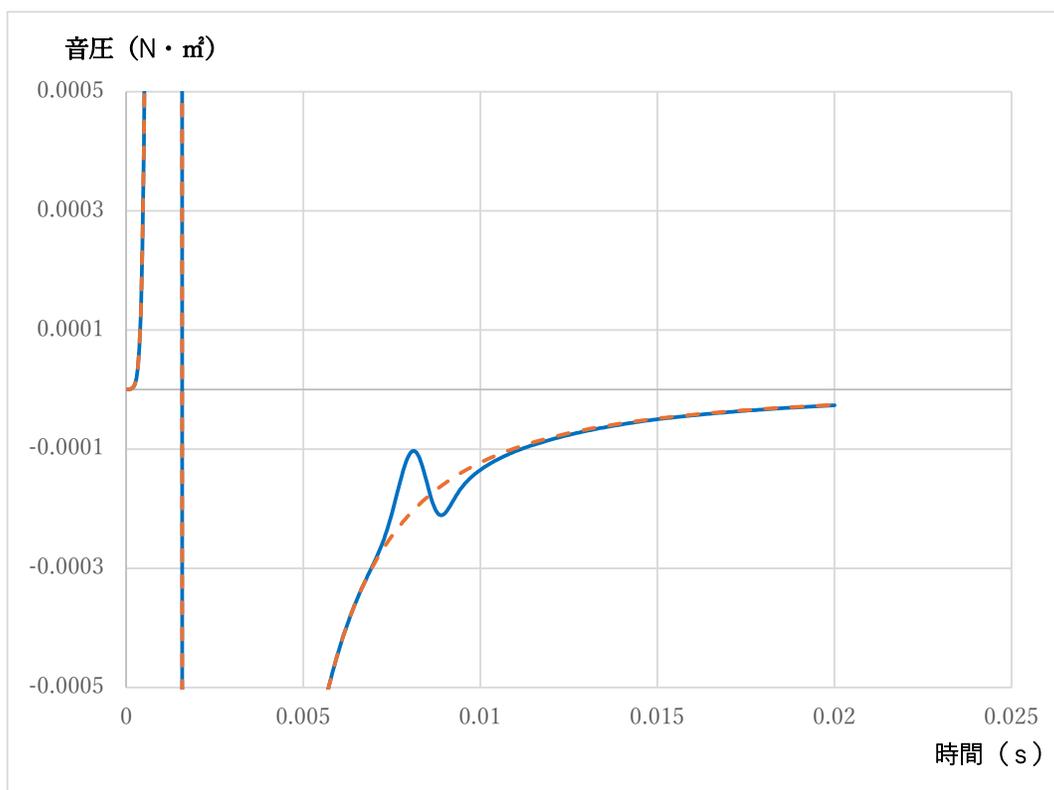


図 4.2 十分に広く設定した音場と対象とする音場の音圧時間応答

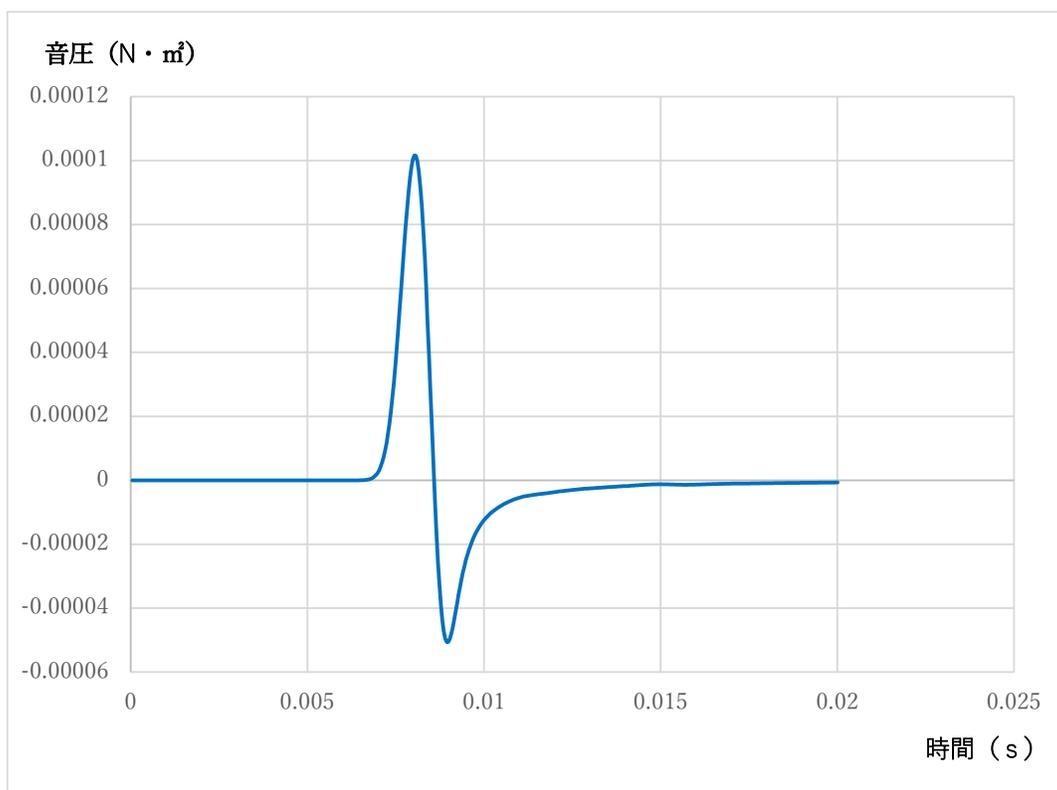


図 4.3 反射波のみの音圧時間応答

4.2 変数の範囲

ピーク音圧比を算出するにあたり、層数、テーパー乗数、減衰係数最大値の中の1つを変数として計算する。層数の検討では、テーパー乗数を4.0、減衰係数最大値を1.200に固定し、層数を16、32、64、128、192層で設定した。テーパー乗数の検討では、層数を16、減衰係数最大値を1.200に固定し、テーパー乗数を1.0、2.0、3.0、3.5、4.0、8.0で設定した。減衰係数最大値の検討では、テーパー乗数を3.0に固定し、層数を72までの8の倍数の層別に設定して、それぞれの減衰係数最大値を算出した。

4.3 変数の有効数字

層数は整数、テーパー乗数は小数点以下 1 桁までとする。減衰係数最大値は、PML の精度と計算時間の兼ね合いにより本研究では小数点以下 3 桁まで計算する。

5. 結果

5.1 層数

まず、層数に関する検討を行う。層数を変数とし、テーパ乗数を 4.0、減衰係数最大値を 1.200 に固定する。このときの層数ごとの受音点での反射音圧時間応答の結果を図 5.1 に示す。

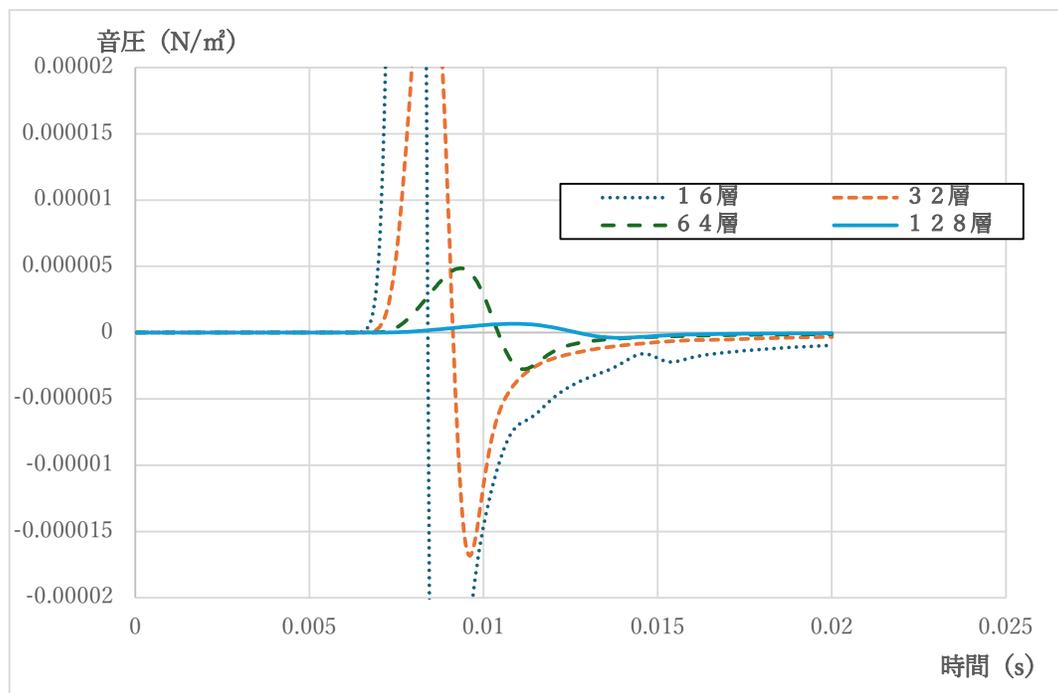
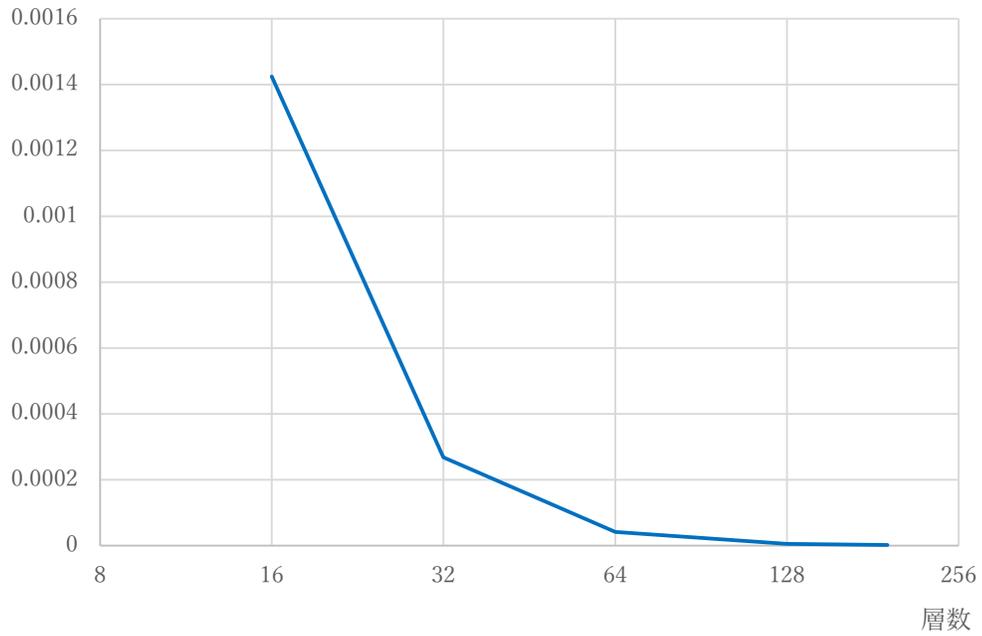


図 5.1 層数ごとの受音点での反射音圧時間応答

続いて、層数によるピーク音圧比の推移を図 5.2 に示す。これより、層数を多くすればするほど、より高性能な PML になることがわかった。なお、テーパ乗数、減衰係数最大値を変えた場合でも、ピーク音圧比自体は変化するが、層数を増やせばピーク音圧比の値が小さくなるという傾向に変化は無かった。

ピーク音圧比



層数	16	32	64	128	192
テーパー乗数	4	4	4	4	4
減衰係数最大値	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000167662	0.000031532	0.000004856	0.000000671	0.000000204
ピーク音圧比	0.001424843	0.000267973	0.000041270	0.000005701	0.000001737

図 5.2 層数によるピーク音圧比応答

5.2 テーパー乗数

続いて、テーパー乗数に関する検討を行う。テーパー乗数を変数とし、層数を 16、減衰係数最大値を 1.200 に固定する。このときのテーパー乗数ごとの受音点での音圧時間応答の結果を図 5.3 に示す。

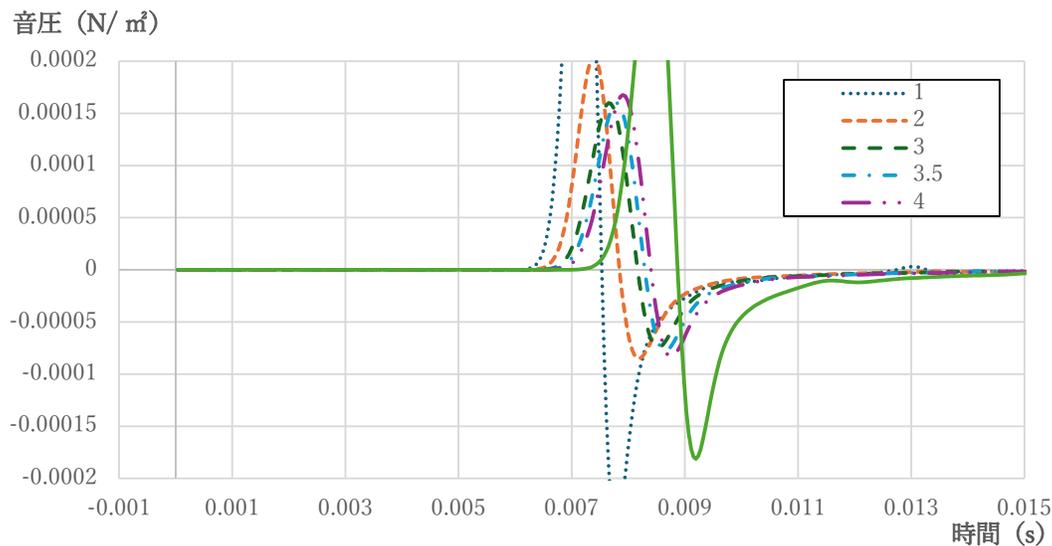
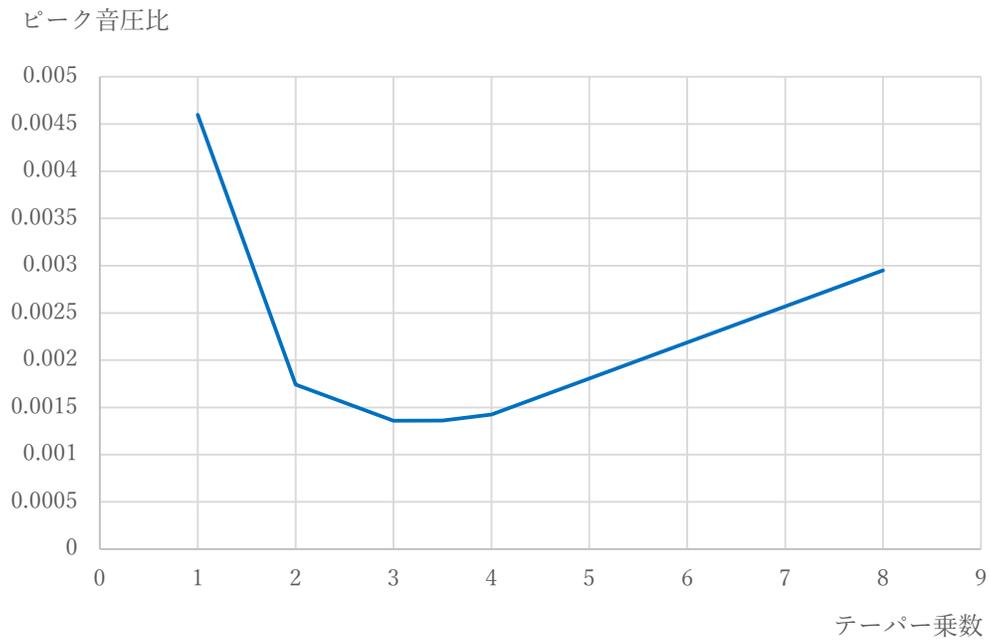


図 5.3 テーパー乗数ごとの受音点での反射音圧応答

続いて、テーパー乗数によるピーク音圧比の推移を図 5.4 に示す。これより、本研究では、テーパー乗数のピーク音圧比は 3.0 で最小となった。テーパー乗数が 3.0 以上 4.0 未満の時のピーク音圧比はすべてほぼ同じという結果であったため、3.0 をテーパー乗数の最適値とする。なお、層数に関する検討の場合と同じく、層数、減衰係数最大値を変えた場合でも、ピーク音圧比自体は変化するが、テーパー乗数が 3.0 のときにピーク音圧比の値が最小になるという結果に変化は無かった。



層数	16	16	16	16	16	16
テーパ乗数	1	2	3	3.5	4	8
減衰係数最大値	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.00054098	0.00020495	0.00016001	0.00016011	0.00016766	0.00034718
ピーク音圧比	0.00459740	0.00174171	0.00135980	0.00136067	0.00142484	0.00295044

図 5.4 テーパ乗数によるピーク音圧比

5.3 減衰係数最大値

続いて、減衰係数最大値に関する検討を行う。減衰係数最大値を変数とし、層数を 16、テーパー乗数を 3.0 に固定したときの、減衰係数最大値ごとの受音点での音圧時間応答の結果を図 5.5 に示す。

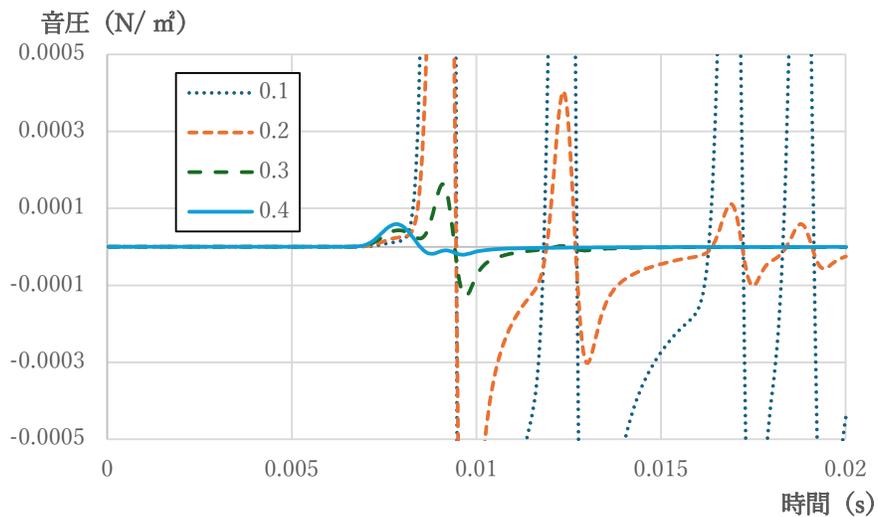


図 5.5 減衰係数最大値ごとの受音点での音圧時間応答

本研究における 16、32、64 層の減衰係数最大値によるピーク音圧比の推移を図 5.6 に、また、その値を図 5.7 に示す。この図からわかるように、層数によって減衰係数最大値の最適値が異なるので、層数ごとに最適値を算出する必要がある。

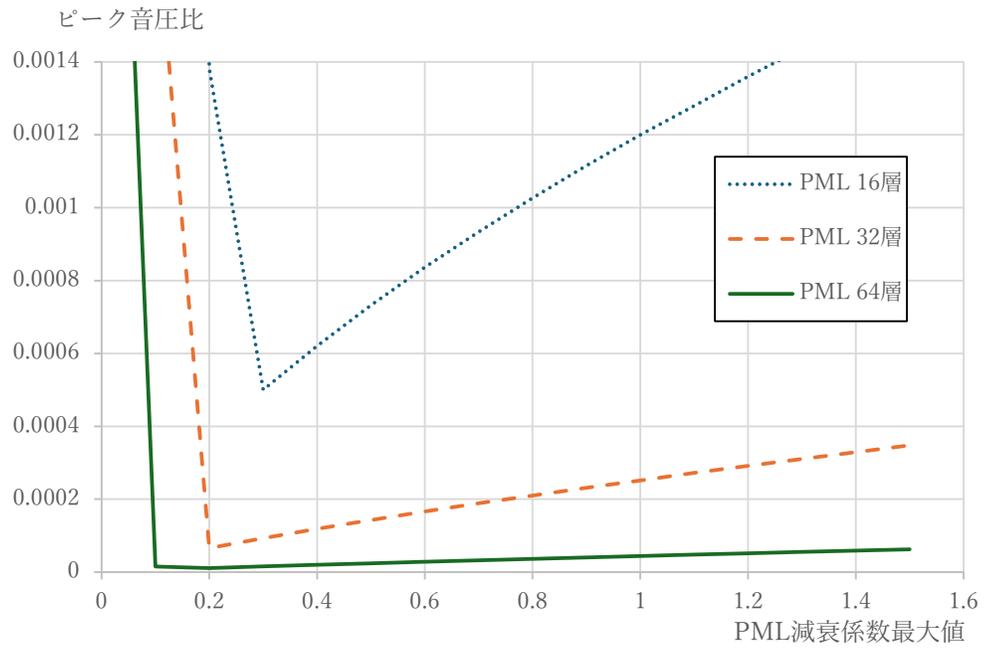


図 5.6 減衰係数最大値によるピーク音圧比の推移のグラフ

層数	16	16	16	16	16
テーパー乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
直接波の最大音圧	0.11767036	0.11767036	0.11767036	0.11767036	0.11767036
反射波の最大音圧	0.00890259	0.00241045	0.00016266	0.00005885	0.00007306
ピーク音圧比	0.07565702	0.02048475	0.00138234	0.00050014	0.00062089

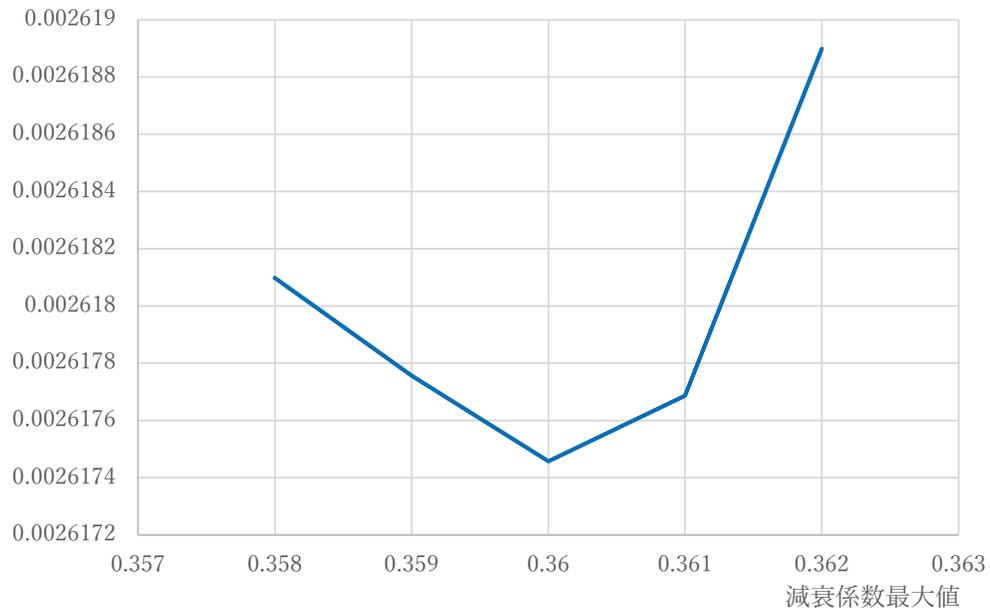
層数	32	32	32	32	32
テーパー乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.00251603	0.00021692	0.00000775	0.00001094	0.00001395
ピーク音圧比	0.02138202	0.00184341	0.00006586	0.00009301	0.00011853

層数	64	64	64	64	64
テーパー乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.00021407	0.00000176	0.00000126	0.00000180	0.00000232
ピーク音圧比	0.00181924	0.00001498	0.00001071	0.00001534	0.00001976

図 5.7 減衰係数最大値によるピーク音圧比の推移の値

次に、72 までの 8 の倍数の層数別に、減衰係数最大値を変数としたピーク音圧比の推移を図 5.8～5.16 に示す。図 5.8～5.16 から、最適な減衰係数最大値は、層数が増えるにつれて小さくなるのがわかる。

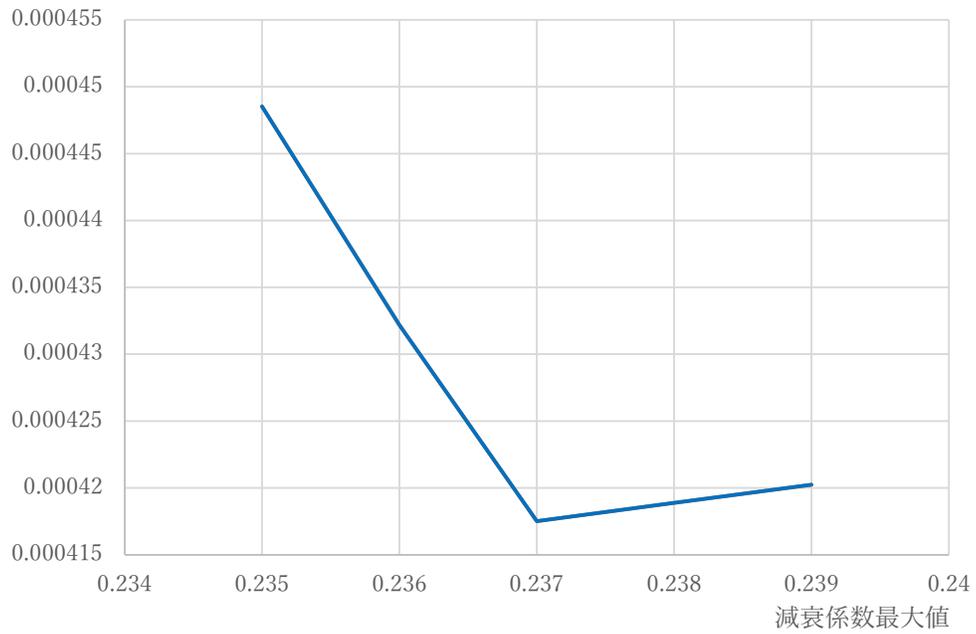
ピーク音圧比



層数	8	8	8	8	8
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.358	0.359	0.36	0.361	0.362
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000308073	0.000308032	0.000307997	0.000308024	0.000308167
ピーク音圧比	0.002618098	0.002617757	0.002617458	0.002617687	0.002618898

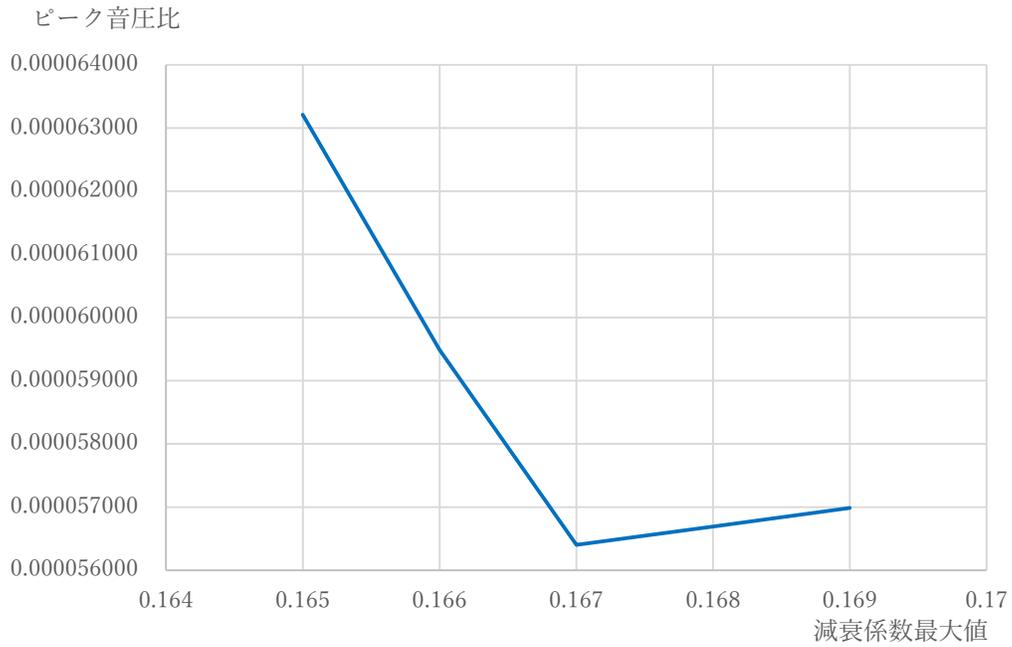
図 5.8 8層の場合

ピーク音圧比



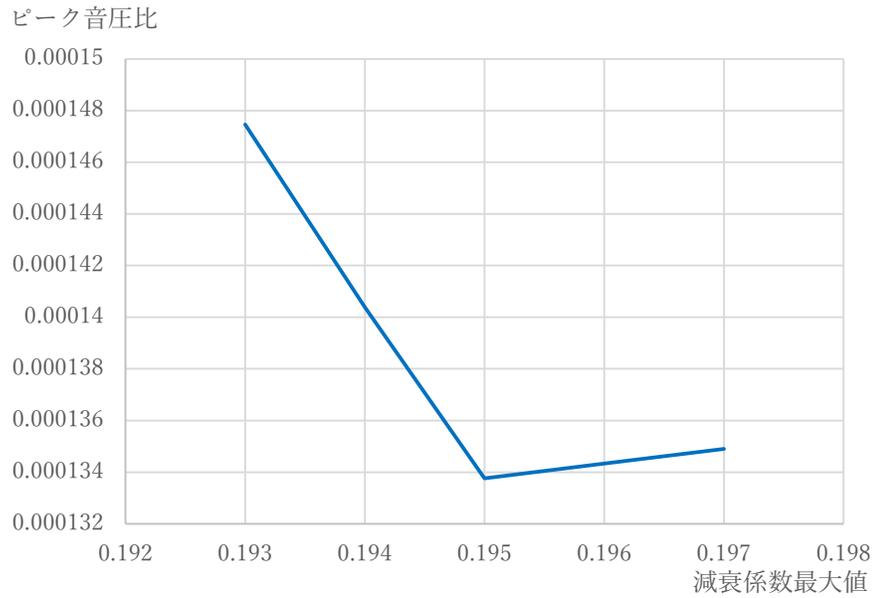
層数	16	16	16	16	16
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.235	0.236	0.237	0.238	0.239
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.00005278	0.00005085	0.00004913	0.00004929	0.00004945
ピーク音圧比	0.000448521	0.00043218	0.000417519	0.000418884	0.000420247

図 5.9 16層の場合



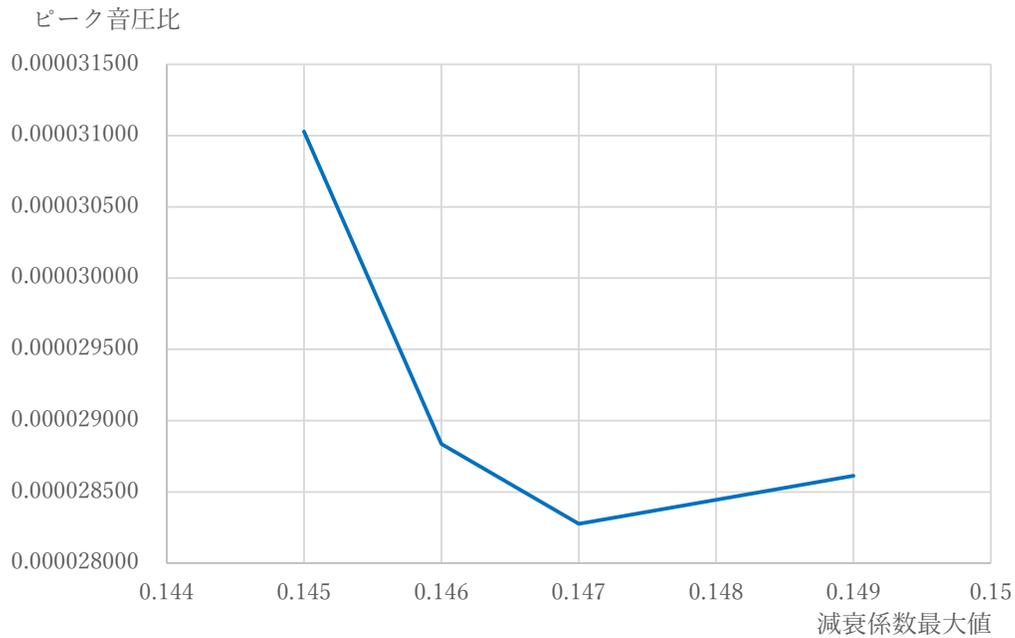
層数	24	24	24	24	24
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.193	0.194	0.195	0.196	0.197
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.00001735	0.00001652	0.00001574	0.00001581	0.00001587
ピーク音圧比	0.000147461	0.000140382	0.000133763	0.000134333	0.000134903

図 5.10 24層の場合



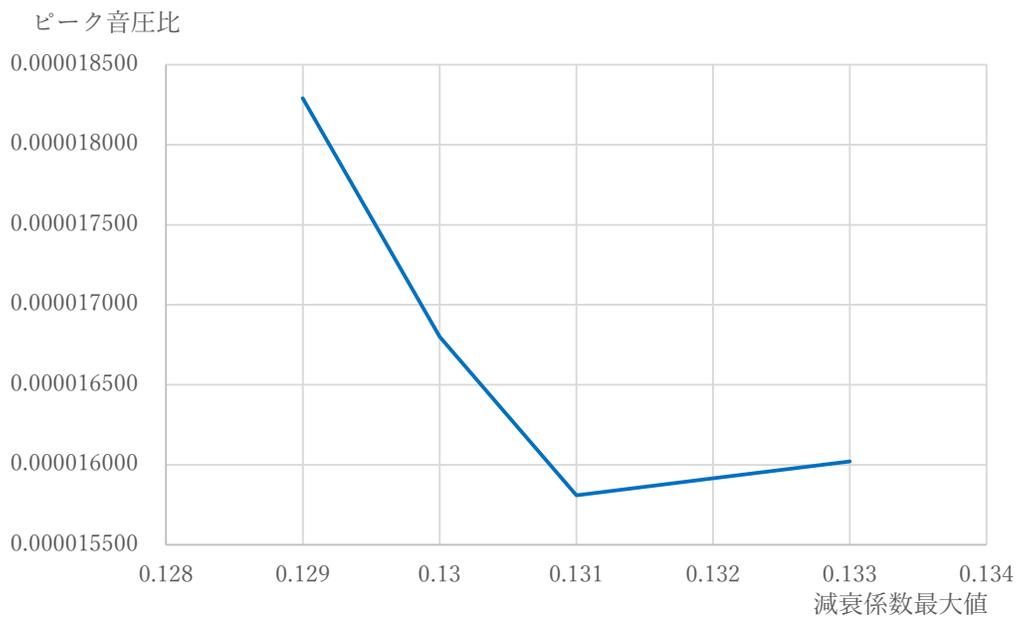
層数	32	32	32	32	32
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.165	0.166	0.167	0.168	0.169
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000007438	0.000007000	0.000006637	0.000006671	0.000006706
ピーク音圧比	0.000063211	0.000059486	0.000056403	0.000056693	0.000056987

図 5.11 32層の場合



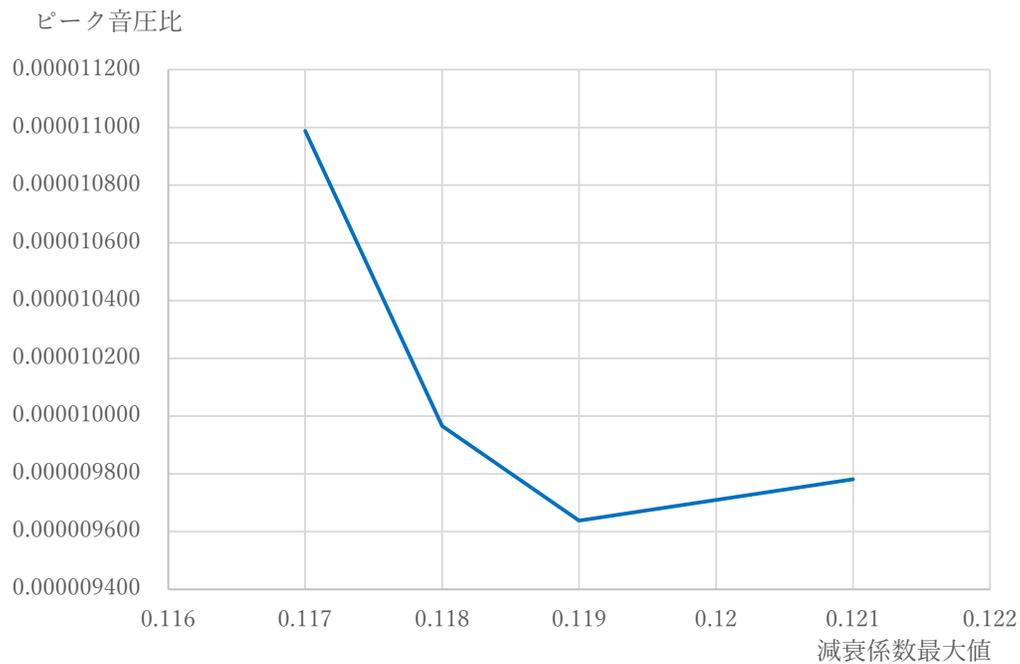
層数	40	40	40	40	40
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.145	0.146	0.147	0.148	0.149
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000003651	0.000003393	0.000003327	0.000003347	0.000003367
ピーク音圧比	0.000031029	0.000028837	0.000028276	0.000028445	0.000028613

図 5.12 40層の場合



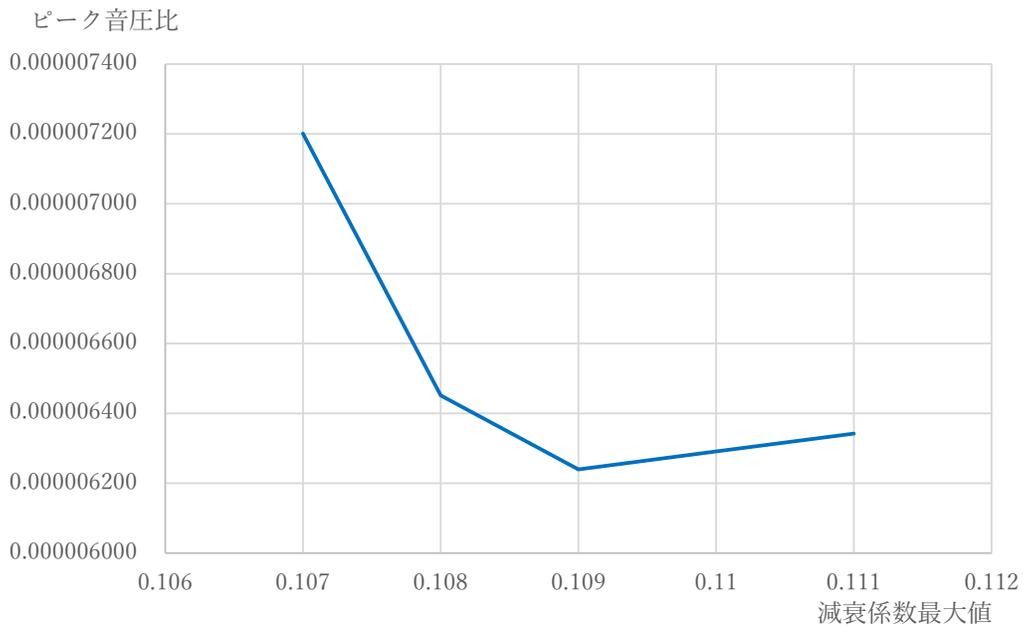
層数	48	48	48	48	48
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.129	0.13	0.131	0.132	0.133
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000002152	0.000001977	0.000001860	0.000001873	0.000001885
ピーク音圧比	0.000018290	0.000016800	0.000015810	0.000015916	0.000016022

図 5.13 48層の場合



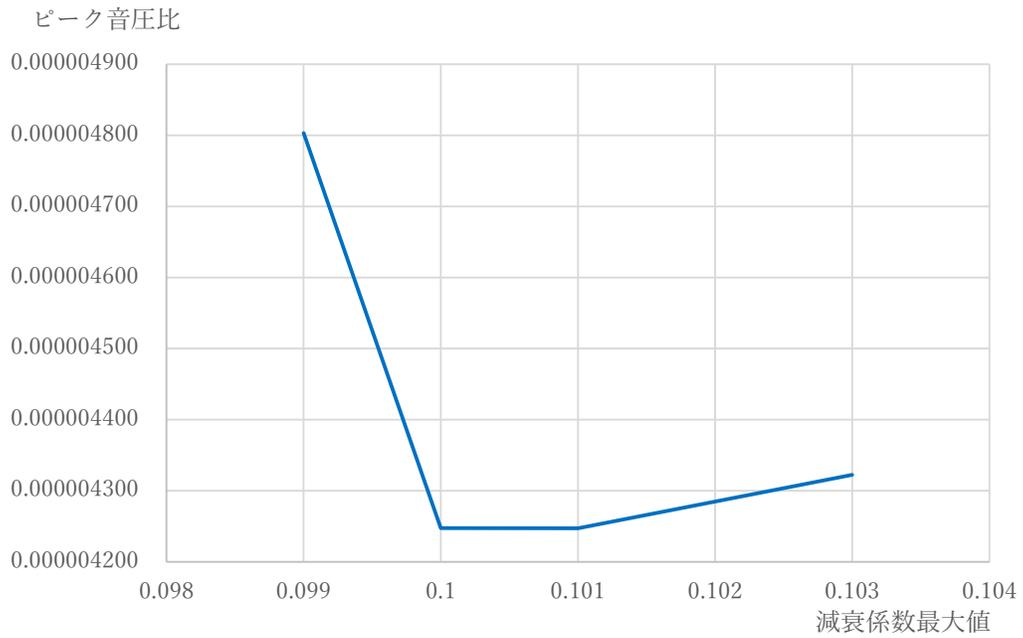
層数	56	56	56	56	56
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.117	0.118	0.119	0.12	0.121
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000001293	0.000001173	0.000001134	0.000001142	0.000001151
ピーク音圧比	0.000010988	0.000009966	0.000009638	0.000009709	0.000009781

図 5.14 56層の場合



層数	64	64	64	64	64
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.107	0.108	0.109	0.11	0.111
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000000847	0.000000759	0.000000734	0.000000740	0.000000746
ピーク音圧比	0.000007201	0.000006451	0.000006239	0.000006291	0.000006342

図 5.15 64層の場合



層数	72	72	72	72	72
テーパ乗数	3	3	3	3	3
減衰係数最大値	0.099	0.1	0.101	0.102	0.103
直接波の最大音圧	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362	0.117670362
反射波の最大音圧	0.000000565	0.000000500	0.000000500	0.000000504	0.000000509
ピーク音圧比	0.000004803	0.000004247	0.000004247	0.000004285	0.000004322

図 5.16 72層の場合

6. 一般化

図 5.9～5.16 により層数ごとの最適な減衰係数最大値が求まったので、層数と最適な減衰係数最大値の関係図を図 6.1 に示す。

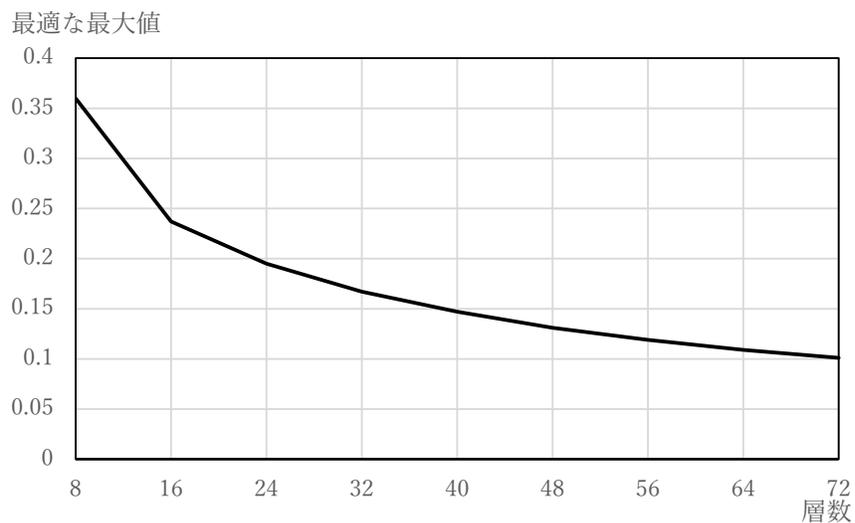


図 6.1 層数と最適な減衰係数最大値の関係図

この図から、層数と最適な減衰係数最大値には一定の関係性があると考えられる。そこで、図 6.1 に近似曲線を点線で追加したものを図 6.2 に示す。

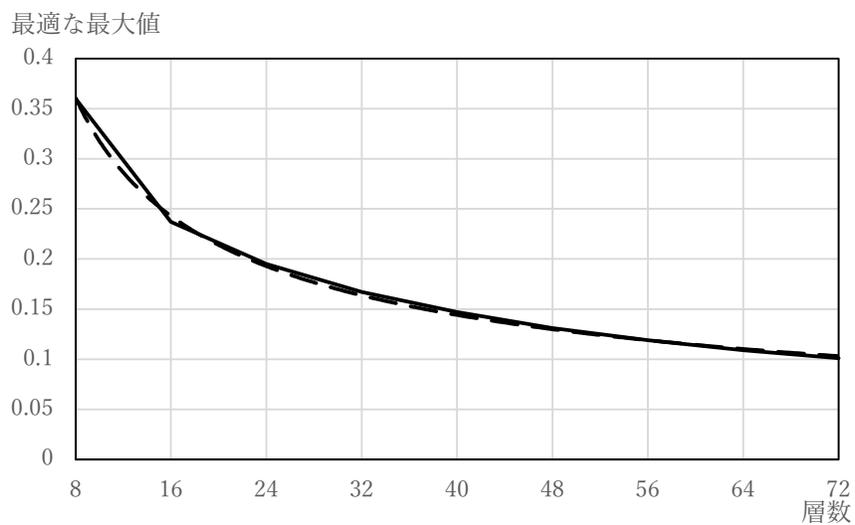


図 6.2 図 6.1 の近似曲線

図 6.2 で示す近似曲線の決定定数は 0.9988 であり、十分に精度の高い近似であるといえる。最適な最大値を y 、層数を x とすれば、この近似曲線の式は次式で表される。

$$y = 1.1801x^{-0.57} \quad (6.1)$$

この式により、どのような層数でも最適な減衰係数最大値を求めることが可能である。なお、空間離散化幅を変化させてもクーラン数が同じであれば、同じ結果になることを確認している。

7. 考察とまとめ

PML の性能を決定する要素である層数、テーパー乗数、減衰係数最大値は次のように決定する。層数は多いほど性能の良い PML になるが、層数が増えるにつれて計算量が増すのでコストに適した値を設定すればよい。テーパー乗数は 3.0 が最適値である。減衰係数最大値は、設定した層数に対して式(6.1)を用いて最適値を算出する。層数 16 の場合について、既往研究[2]と本研究のそれぞれについて最適な PML を設定した場合の音圧時間波形を図 7.1 に示す。

層数と最適減衰係数最大値の関係をべき乗近似により整理した結果、本研究では式(6.1)が得られた。一方、既往研究では式(2.28)が示されている。両式は係数および指数が近い値を示しており、層数の増加に伴い最適減衰係数最大値が減少するという傾向は共通して確認された。ただし、指数および係数にはわずかな差が見られ、層数が大きい領域では両者の差が相対的に大きくなる傾向がある。また、ピーク音圧比に着目すると、本研究で対象とした 2 次元音場では、既往研究における 3 次元音場と比較して、およそ 1/5 程度の値を示した。2 次元音場では音波が平面内を伝播するため、3 次元音場に比べてエネルギーが減衰しにくく、境界に到達する音圧が相対的に大きくなる。このことが、ピーク音圧比の差として顕在化した一因であると考えられる。

以上より、本研究で得られた結果は、既往研究における 3 次元音場の傾向と整合しつつ、2 次元音場特有のエネルギー分散特性を反映したものであり、PML パラメータ設計における定量的な指針を示す結果といえる。

	既往研究	本研究
層数	16	16
テーパー乗数	4	3
減衰係数最大値	0.262	0.237
直接波の最大音圧	7488.297	0.117670362
反射波の最大音圧	0.203826	0.00004913
ピーク音圧比	0.002722	0.000417519

図 7.1 既往研究と本研究のピーク音圧比の比較

参考文献

- [1] 豊田政弘他, 「FDTD 法で視る音の世界」, コロナ社, 東京, 2015.
- [2] 日比野真之, 「FDTD 法における完全吸収層(PML)の最適化」, 関西大学卒業論文, 2017.
- [3] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas Propag., 14, 302-307, 1966.
- [4] 田口大悟, 「FDTD 法における完全吸収層(PML)の減衰量」, 関西大学卒業論文, 2016.

謝辞

本研究を進めるにあたり、お忙しい中ご指導・ご鞭撻して頂きました豊田政弘先生にこの場をお借りして心より深くお礼申し上げます。また、建築環境工学第一研究室の皆様からは、研究に有益な助言を頂き、心より深くお礼申し上げます。