

Perfectly Matched Layer の最適化に関する研究
－1次元音場について－

関西大学 環境都市工学部 建築学科
建築環境工学第 I 研究室
建 22-76 幅口潤
指導教官 豊田 政弘 教授

目次

1. はじめに	
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
2. 計算方法	
2.1 時間領域有限差分法 (FDTD 法)	3
2.2 Perfectly Matched Layer の定式化	7
2.3 既往研究	10
3. 計算条件	11
4. 評価方法	
4.1 ピーク音圧比	12
4.2 変数の範囲	13
4.3 変数の有効数字	14
5. 既往研究の検討	
5.1 層数	15
5.2 テーパー乗数	17
6. 結果	
6.1 層数 16	21
6.1 層数 32	25
6.1 層数 48	29
6.1 層数 64	33
7. 考察とまとめ	36

1. はじめに

1.1 研究背景

1950年頃のコンピュータ時代の幕開けを受けて波動音響解析が登場した[1]。代表的な解法としては有限差分法 (Finite Difference Method: FDM)、有限要素法 (Finite Element Method: FEM)、境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) が挙げられる。本研究で使用する有限時間差分法 (Finite-Difference Time-Domain 法: FDTD 法) は FDM の一種である。開発から時が経ち、現在に至っても、FDTD 法を用いた様々な研究が行われている。その中でも、開領域の計算を実現するための Perfectly Matched Layer (PML) の研究は音響分野のみならず、様々な分野で検討が進められてきた。しかし、PML の性能を決定する要素であるいくつかの定数は経験的に決められることが多く、その効果を十分に発揮できていない可能性がある。開領域における計算をより正確に行うためには PML の性能を最大限に発揮することが不可欠である。

1.2 研究目的

前節で述べたことを踏まえ、PML を用いた FDTD 法の開領域計算をより正確なものにするために、PML の性能を決定する要素である層数、テーパ乗数、減衰係数最大値の最適値を探索し、それらの関係性を求めることで、より反射の少ない PML を作成すること、また、日比野[2]によって提案された 3 次元音場における最適条件が、1 次元音場でも適当か定かではないため、それを検証することを本研究の目的とする。

2. 計算方法

2.1 時間領域有限差分法 (FDTD 法)

FDTD 法は、K. S. Yee [3] によって電磁波の支配式であるマクスウェル方程式を解くことを目的に開発された数値解析手法の一種であり、スタガードグリッドとリーブフロッグアルゴリズムを用いた時間領域の有限差分法のことをいう [1]。FDTD 法を用いた音場解析の支配式として運動方程式と連続方程式を考える。密度を ρ 、音圧を p 、空気粒子の x, y, z 方向の変位をそれぞれ u_x, u_y, u_z とすると、 x, y, z 方向の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.3)$$

となる。また、体積弾性率を κ 、変位ベクトルを $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とすると連続方程式は

$$p = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} = -\kappa \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (2.4)$$

となる。リーブフロッグアルゴリズムを適用するためには、式(2.1)~(2.4)を一階の偏微分方程式に変形する必要がある。そこで、 x, y, z 方向の粒子速度をそれぞれ v_x, v_y, v_z とすると、式(2.1)~(2.4)の方程式は

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

と変形される。FDTD 法の離散化は、1次元音場を考えると、図 2.1 のように表される。図の横方向は空間的变化を表しており、音圧が定義される空間を実線で表している。図中の

丸が音圧参照点であり、 x 方向に隣り合う参照点間の距離が空間離散化幅 Δx となる。図の縦方向は時間的変化を表しており、時間離散化幅を Δt とする。粒子速度は、音圧の参照点から $\Delta x/2$ 、 $\Delta t/2$ だけずらした点に定義する。また、 x 方向に関して何番目の音圧参照点であるかを、 i を用いて表す。この i を空間ステップと呼ぶ。同様に、何番目の時間参照点であるかを、 n を用いて表す。この n を時間ステップと呼ぶ。このような、空間的にも時間的にも音圧と粒子速度の参照点を互い違いに配置した格子をスタガードグリッドと呼び、時間的に半ステップ前と 1 ステップ前の音圧と粒子速度分布がわかれば、現在のステップの分布を求めることが可能となる。

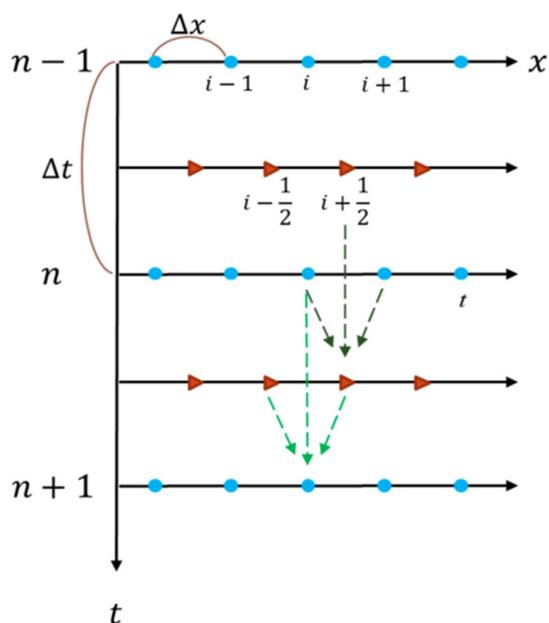


図 2.1 スタガードグリッド (1次元音場)

次に、3次元音場について、時間方向の離散化の表現を省略した参照点の分布を図 2.2 に示す。これを Yee セルと呼ぶ。1次元音場の場合と同様に、 x 方向に加えて、 y, z 方向に関して何番目の音圧参照点であるかを、それぞれ i, j, k を用いて表す。図中の丸は音圧参照点であり、三角錐は x, y, z 方向のそれぞれの粒子速度である。また、空間ステップが i, j, k で時間ステップが n の音圧を $p^n(i, j, k)$ 、空間ステップが $i + 0.5, j, k$ で時間ステップが $n + 0.5$ の x 方向粒子速度を $v_x^{n+0.5}(i + 0.5, j, k)$ などと表記する。

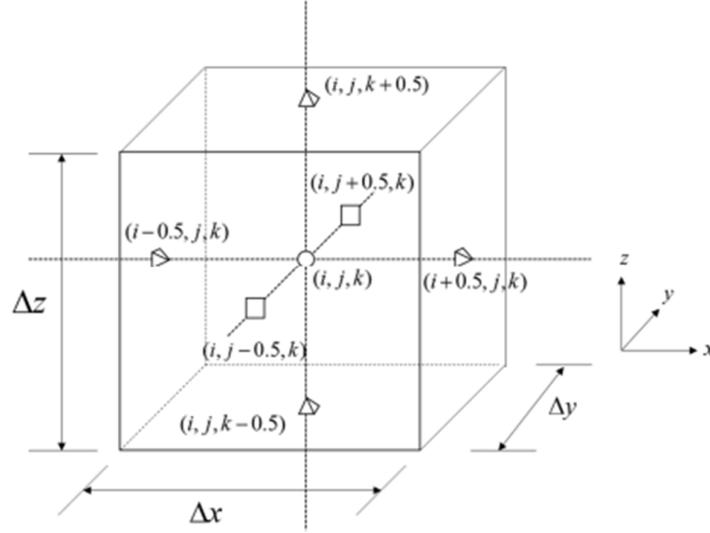


図 2.2 Yee セル (3次元音場)

上記の離散化に伴い、式(2.5)~(2.8)を中心差分近似すると次式が得られる。

$$\rho \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n-0.5}(i+0.5, j, k)}{\Delta t} = - \frac{p^n(i+1, j, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n-0.5}(i, j+0.5, k)}{\Delta t} = - \frac{p^n(i, j+1, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta y} \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n-0.5}(i, j, k+0.5)}{\Delta t} = - \frac{p^n(i, j, k+1) - p^n(i, j, k)}{\Delta z} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p^{n+1}(i, j, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta t} \\ &= -\kappa \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j, k)}{\Delta x} \\ & \quad - \kappa \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5, k)}{\Delta y} \\ & \quad - \kappa \frac{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n+0.5}(i, j, k-0.5)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

式(2.9)~(2.12)を、最も時間ステップが大きい項のみを左辺に残すような形に変形すると、

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) = v_x^{n-0.5}(i+0.5, j, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p^n(i+1, j, k) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.13)$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j + 0.5, k) = v_y^{n-0.5}(i, j + 0.5, k) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \{p^n(i, j + 1, k) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.14)$$

$$v_z^{n+0.5}(i, j, k + 0.5) = v_z^{n-0.5}(i, j, k + 0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta z} \{p^n(i, j, k + 1) - p^n(i, j, k)\} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1}(i, j, k) = & p^n(i, j, k) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i + 0.5, j, k) - v_x^{n+0.5}(i - 0.5, j, k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j + 0.5, k) - v_y^{n+0.5}(i, j - 0.5, k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta z} \{v_z^{n+0.5}(i, j, k + 0.5) - v_z^{n+0.5}(i, j, k - 0.5)\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となり、これらを用いることで逐次的にすべての参照点の音圧と粒子速度を求めることができる。

2.2 Perfectly Matched Layer の定式化

FDTD 法は解析領域が有限な領域（閉領域）であるので、開領域である自由空間を直接的に取り扱うことはできない。そこで考案されたのが PML である。PML とは、解析領域である空気領域と解析領域外である吸音層の特性インピーダンスが周波数、入射角度に関係なく一致する仮想的な媒質のことである。この吸音層の中で音波を減衰させつつ、伝搬させることで、PML の端部による反射波が解析領域に戻るまでに音波を十分に低減する。音波伝搬の支配方程式である運動方程式(2.5)~(2.7)に減衰係数 F_x, F_y, F_z をもつ減衰項を追加すると、吸音層での支配式は次式となる。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + F_x v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + F_y v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + F_z v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.19)$$

続いて、 $p = p_x + p_y + p_z$ となるように人工的に p_x と p_y と p_z に分ける。一方、連続方程式(2.8)に仮想的な減衰係数 F'_x, F'_y, F'_z を含む減衰項を追加し、 p_x, p_y, p_z のそれぞれに関する連続方程式を立式すると次式となる。

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + F'_x p_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + F'_y p_y = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial t} + F'_z p_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.22)$$

まず、式(2.17)~(2.22)の中で x 方向に関する式のみを取り出して考える。音速を c とすると、空気中での特性インピーダンスの式は $p_x/v_x = \rho c$ であり、これを変形すると次式になる。

$$p_x = \rho c v_x \quad (2.23)$$

式(2.23)を式(2.17)に代入し、 ρ で割ると、次式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{F_x}{\rho} v_x = -c \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.24)$$

また、式(2.23)を式(2.20)に代入し、 ρc で割ると次式が得られる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + F'_x v_x = -c \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.25)$$

式(2.24)と式(2.25)から次式が得られる。

$$F'_x = \frac{F_x}{\rho} \quad (2.26)$$

この式により、 F_x を定めれば F'_x も決定される。 y, z 方向についても同様である。図 2.3 に、2次元音場における PML の設定の概要を示す。

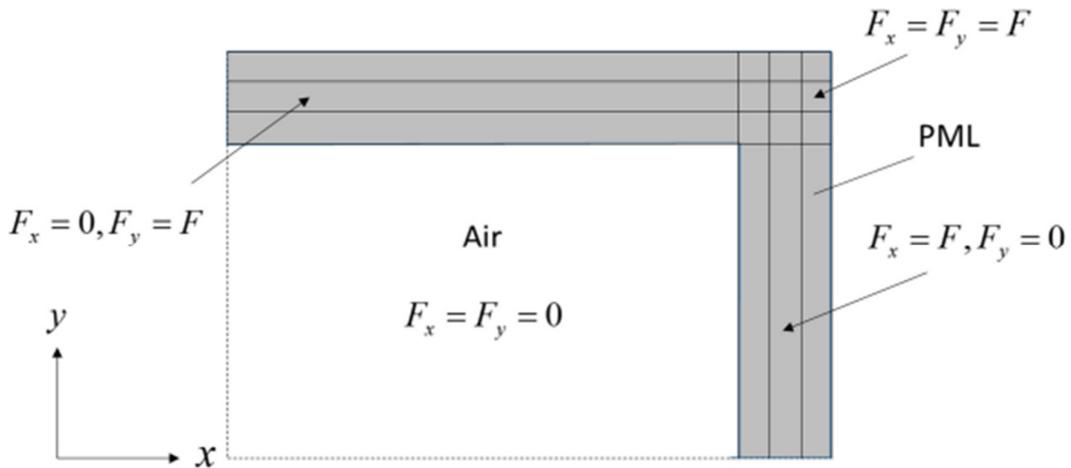


図 2.3 PML の概要

続いて、 x 方向の PML 付近を拡大したものを図 2.4 に示す。急激に F の値を変化させると、離散化した際の不連続性が増すことによって反射が生じる。そのため、 F の x 方向の分布は、図 2.4 のグラフのように、滑らかに増大していくような形にしなければならない。そのような F は次式で表現する。

$$F(x) = F_{max} \left(\frac{x}{L\Delta x} \right)^\tau \quad (2.27)$$

この式は層数 L 、減衰係数最大値 F_{max} 、テーパー乗数 τ の値により決定される。

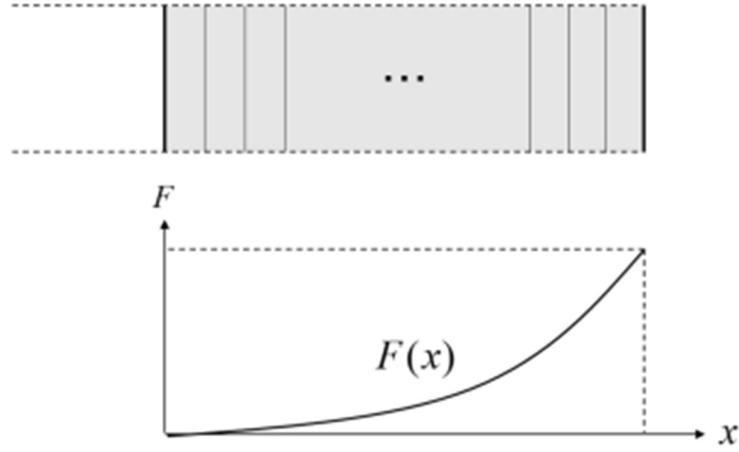


図 2.4 PML の x 方向拡大図

2.3 既往研究

田口による既往研究[4]では、図2.5に示すように、階段状に変化する $F(x)$ を与えており、それが原因で PML の性能が十分でなかったと思われる。そこで、日比野による既往研究[2]では、粒子速度参照点の $F(x)$ に前後の音圧参照点の $F(x)$ の平均値を与えることによって、より高性能な PML になるよう修正した。本研究でも、これを採用する。

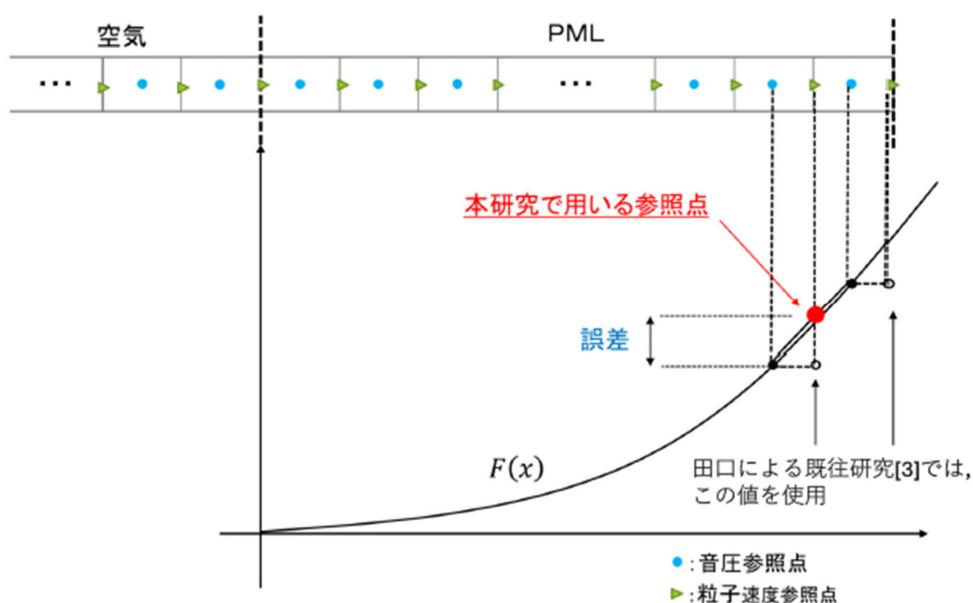


図 2.5 既往研究との違い

これより、層数を多くすればするほど、より高性能な PML になること、減衰係数最大値を変えた場合でも、テーパ乗数が 4.0 のときにピーク音圧比の値が最小になることから、4.0 をテーパ乗数の最適値とし、層数と最適な減衰係数最大値の関係について、最適な最大値を y 、層数を x とすれば、この近似曲線の式は次式で表された。

$$y = 1.1471x^{-0.54} \quad (2.28)$$

本研究と既往研究との違いとしては、1次元音場を対象として PML の最適化を行うこと、1次元音場における研究であるため、構造が単純で理論検証や基本原理の理解に適している点や反射の影響、吸収層の設計などを検証する実験台として優れているといった点が挙げられる。

3. 計算条件

本研究で対象とする音場として、図 3.1 に示す 2.0 m の 1 次元音場を考える。音源、受音点はともに図中の中心の位置で x 方向に 1.0 m の位置（直線の中心）である。その他の条件として、空気の密度は 1.2 kg/m^3 、空気の音速は 340 m/s 、音源波形として与えるガウシアンパルスの最大値は $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 、ガウシアンパルスの急峻さを表す係数は 7.0×10^6 、ガウシアンパルスの中心時間は $1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ とする。また FDTD 法の空間離散化幅 Δx は $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、時間離散化幅 Δt は $5.88 \times 10^{-5} \text{ s}$ （クーラン数 $c\Delta t/\Delta x \leq 1$ ）とする。この解析領域の外側に PML を設置し、受音点での音圧時間応答を観測する。

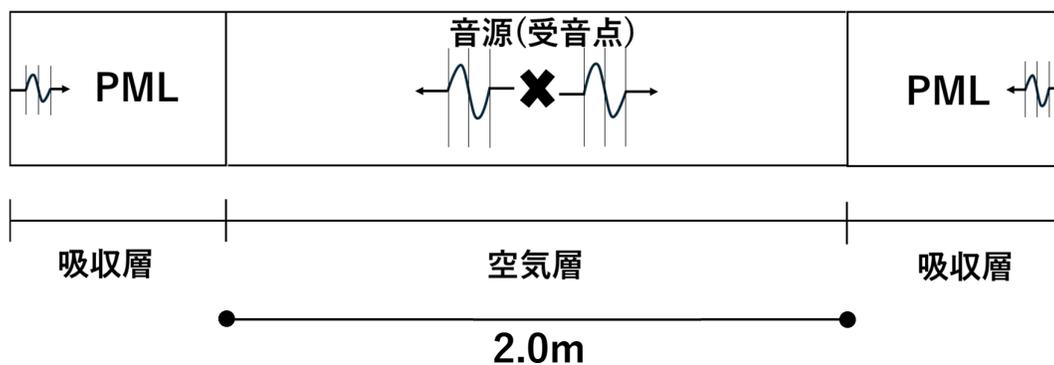


図 3.1 解析領域

4. 評価方法

4.1 ピーク音圧比

前節で示した受信点での音圧時間応答を計算した結果の例を図 4.1 に示す。図 4.1 の①は直接波の音圧であり、②は反射波の音圧である。この 2 つのピーク値の比をとることで、直接波に対する反射波の大きさの割合を算出する。これをピーク音圧比と呼ぶこととする。この値が小さいほど音波が反射しておらず、性能の良い PML といえる。PML を決定する要素である層数、テーパ乗数、減衰係数最大値の中の 2 つを固定し、残りの 1 つを変化させ、ピーク音圧比を比較する。

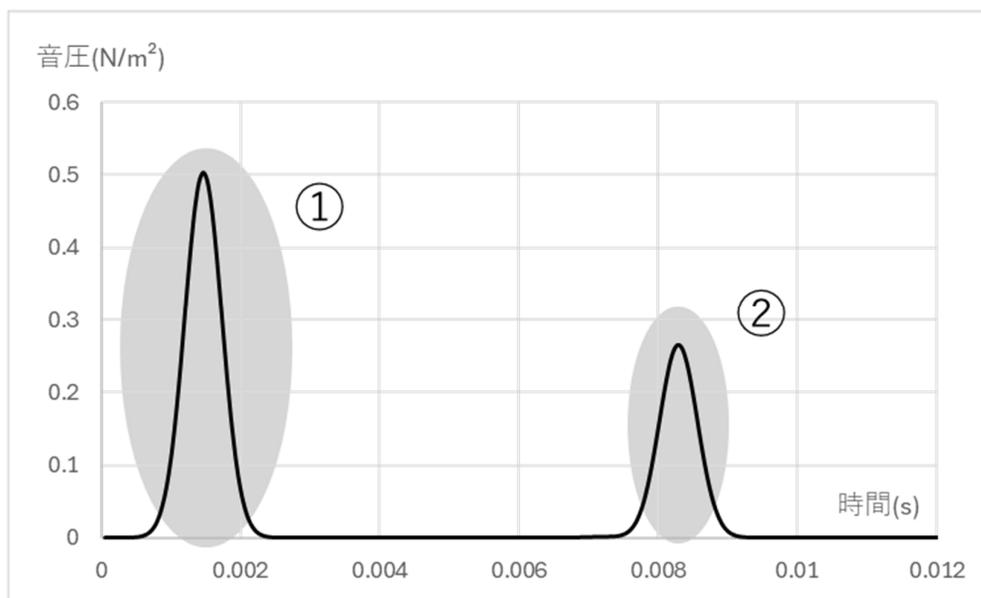


図 4.1 音圧時間応答の例

4.2 変数の範囲

ピーク音圧比を算出するにあたり、層数、テーパー乗数、減衰係数最大値の中の1つを変数として計算する。層数の検討では、テーパー乗数を4.0、減衰係数最大値を1.20に固定し、層数を16、32、64、128、192層とした。テーパー乗数の検討では、層数を16、減衰係数最大値を1.20に固定し、テーパー乗数を1.0、3.0、4.0、4.5、5.0、8.0とし、既往研究と同様の条件を用いた。その結果、既往研究とは異なる傾向が確認されたため、本研究では層数を16から64まで16層刻みで変化させ、各層数に対してテーパー乗数および減衰係数最大値の最適値を求める。テーパー乗数および減衰係数最大値を変化させ、ピーク音圧比が最小となる最適値を探索する。

4.3 変数の有効数字

層数は整数、テーパー乗数は小数点以下 1 桁までとする。減衰係数最大値は、PML の精度と計算時間の兼ね合いにより本研究では小数点以下 2 桁まで計算する。

5. 既往研究の検討

5.1 層数

まず、層数に関する検討を行う。層数を変数とし、テーパー乗数を 4.0、減衰係数最大値を 1.20 に固定する。このときの層数ごとの受信点での音圧時間応答の結果を図 5.1 に示す。

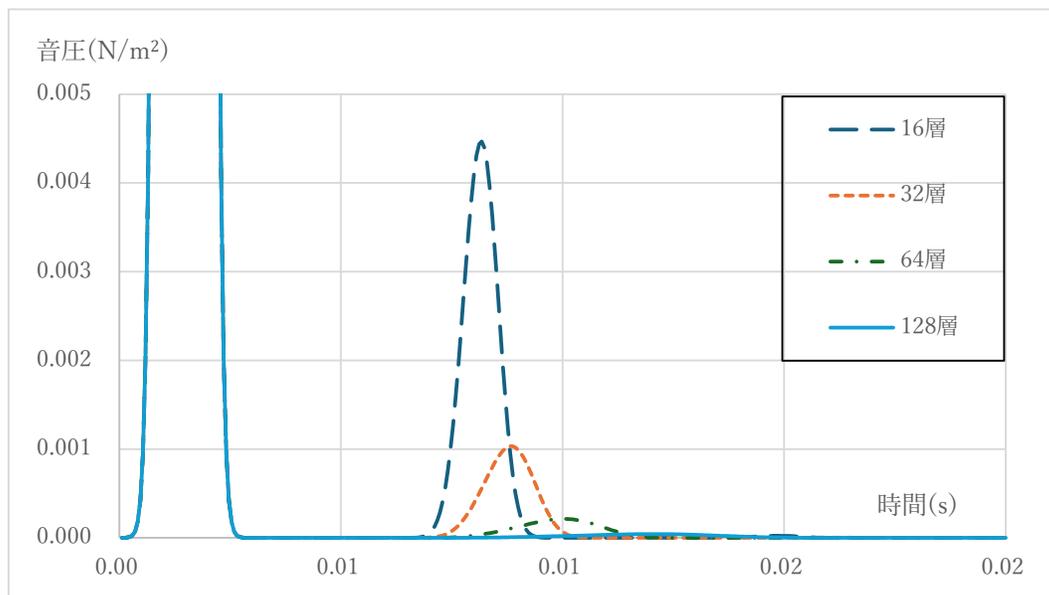
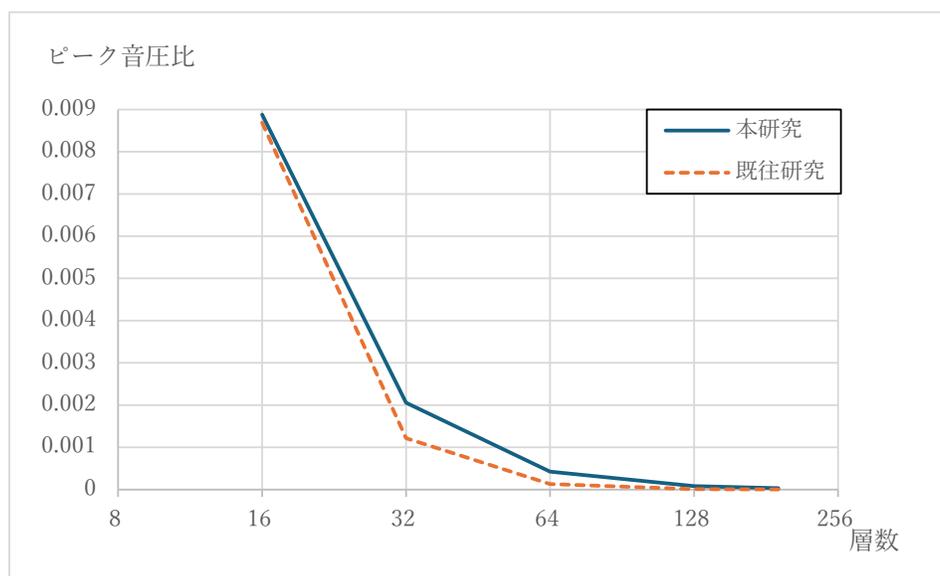


図 5.1 層数ごとの受信点での音圧時間応答

続いて、層数によるピーク音圧比の推移を図 5.2 に示す。これより、層数を多くすればするほど、より高性能な PML になることがわかった。なお、テーパー乗数、減衰係数最大値を変えた場合でも、ピーク音圧比自体は変化するが、層数を増やせばピーク音圧比の値が小さくなるという傾向に変化は無かった。



層数	16	32	64	128	192
テーパ乗数	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
減数係数最大値	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
直接波の最大音圧	0.50307480	0.50307480	0.50307480	0.50307480	0.50307480
反射波の最大音圧	0.00446616	0.00103328	0.00021339	0.00004176	0.00001593
本研究					
ピーク音圧比	0.00887773	0.00205392	0.00042418	0.00008301	0.00003166
既往研究					
ピーク音圧比	0.00868512	0.00121413	0.00013040	0.00001170	0.00000270

図 5.2 層数によるピーク音圧比の推移

5.2 テーパー乗数

続いて、テーパー乗数に関する検討を行う。テーパー乗数を変数とし、層数を 16、減衰係数最大値を 1.20 に固定する。このときのテーパー乗数ごとの受音点での音圧時間応答の結果を図 5.3 に示す。

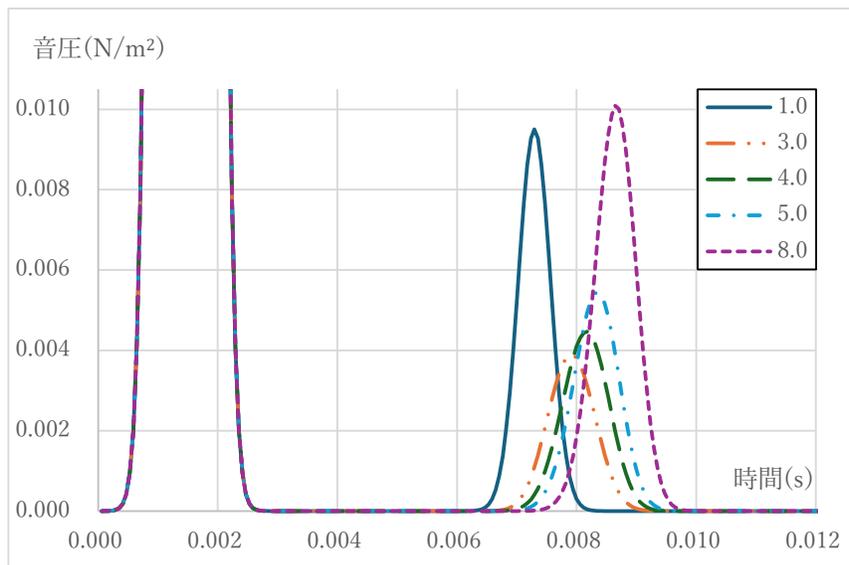
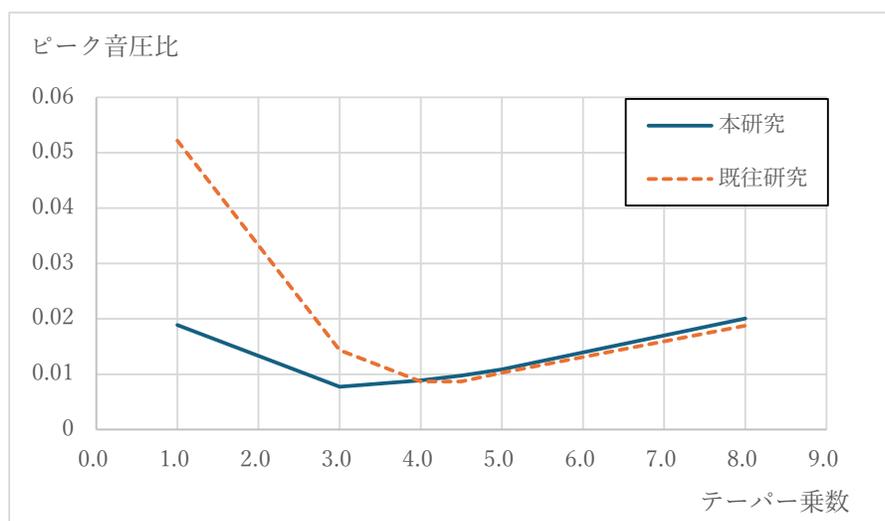


図 5.3 テーパー乗数ごとの受音点での音圧時間応答

さらに、テーパー乗数によるピーク音圧比の推移を図 5.4 に示す。これより、本研究は既往研究と異なり、テーパー乗数のピーク音圧比は 4.5、4.0 ではなく、3.0 で最小となった。また、既往研究では、テーパー乗数が 4.0 以上 5.0 未満の時のピーク音圧比はすべて同じという結果であった。また、減衰係数最大値を変えた場合でも、ピーク音圧比自体は変化するが、テーパー乗数が 4.0 のときにピーク音圧比の値が最小になるという結果に変化はなかった。そのため、4.0 をテーパー乗数の最適値とした。しかし、本研究では、層数、減衰係数最大値を変えた場合、テーパー乗数の最適値に変化が見られた。テーパー乗数を 1.0~5.0、減衰係数最大値を 1.0~5.0 の間で変化させた層数 16 と層数 64 それぞれのピーク音圧比の推移を図 5.5、図 5.6 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。これより、減衰係数最大値を 1.0 に固定し、層数を 16 から 64 へ変えた場合、テーパー乗数の最適値は 3.0 から 4.0 へ変化する。また、層数を 16 に固定し、減衰係数最大値を 1.0 から 4.0 へ変えた場合、テーパー乗数の最適値は 3.0 から 4.0 へ変化する。よって、本研究では、層数を 16 から 64 まで 16 の倍数の層数ごとのテーパー乗数、減衰係数最大値を求めることとする。



層数	16	16	16	16	16	16
テーパ乗数	1.0	3.0	4.0	4.5	5.0	8.0
減数係数最大値	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
直接波の最大音圧	0.503075	0.503075	0.503075	0.503075	0.503075	0.503075
反射波の最大音圧	0.009502	0.003894	0.004466	0.004908	0.005456	0.010088
本研究						
ピーク音圧比	0.018888	0.007741	0.008878	0.009756	0.010845	0.020052
既往研究						
ピーク音圧比	0.052167	0.014350	0.008685	0.008685	0.010259	0.018768

図 5.4 テーパ乗数によるピーク音圧比

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	0.015686	0.007385	0.006916	0.008093	0.010038
2.0	0.031922	0.012743	0.010649	0.011421	0.013322
3.0	0.048769	0.017335	0.013590	0.013907	0.015676
4.0	0.066313	0.021400	0.016125	0.015918	0.017522
5.0	0.084674	0.025262	0.018346	0.017737	0.019179

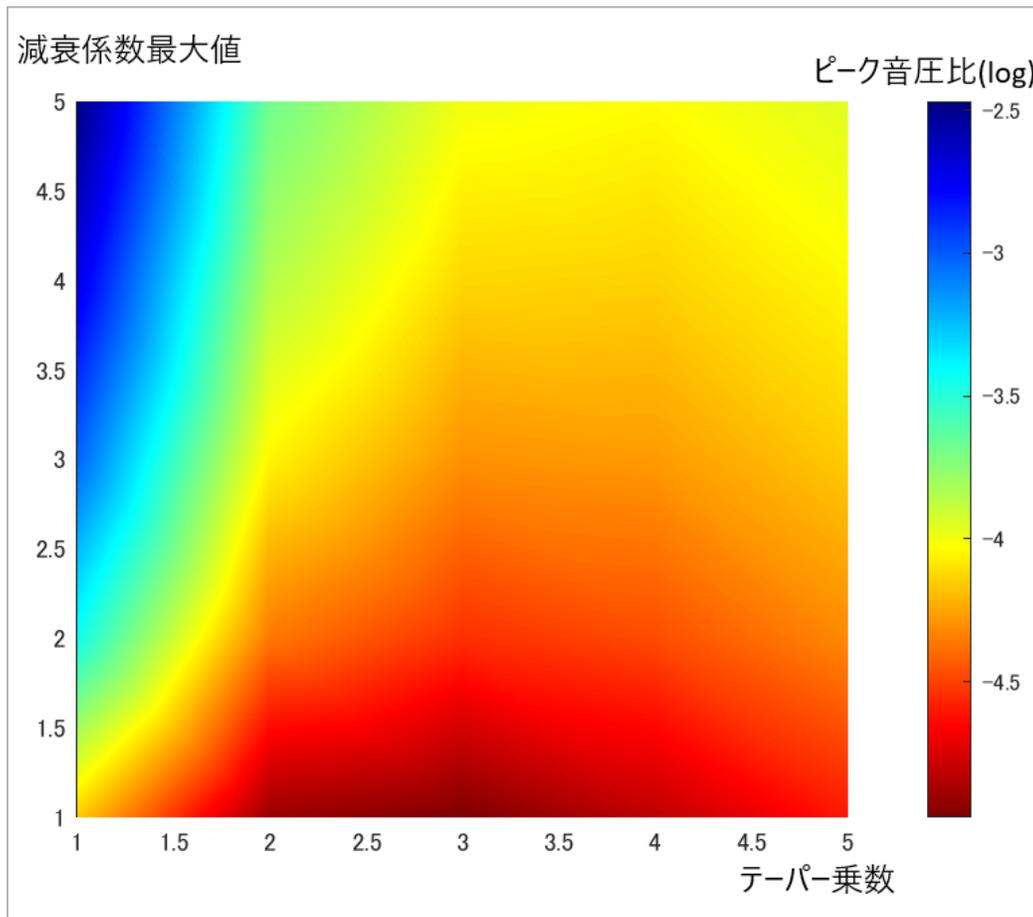


図 5.5 層数 16 におけるピーク音圧比

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	0.003873	0.000638	0.000387	0.000382	0.000431
2.0	0.007778	0.001219	0.000640	0.000570	0.000602
3.0	0.011715	0.001761	0.000857	0.000720	0.000732
4.0	0.015686	0.002280	0.001053	0.000850	0.000839
5.0	0.019692	0.002775	0.001234	0.000965	0.000933

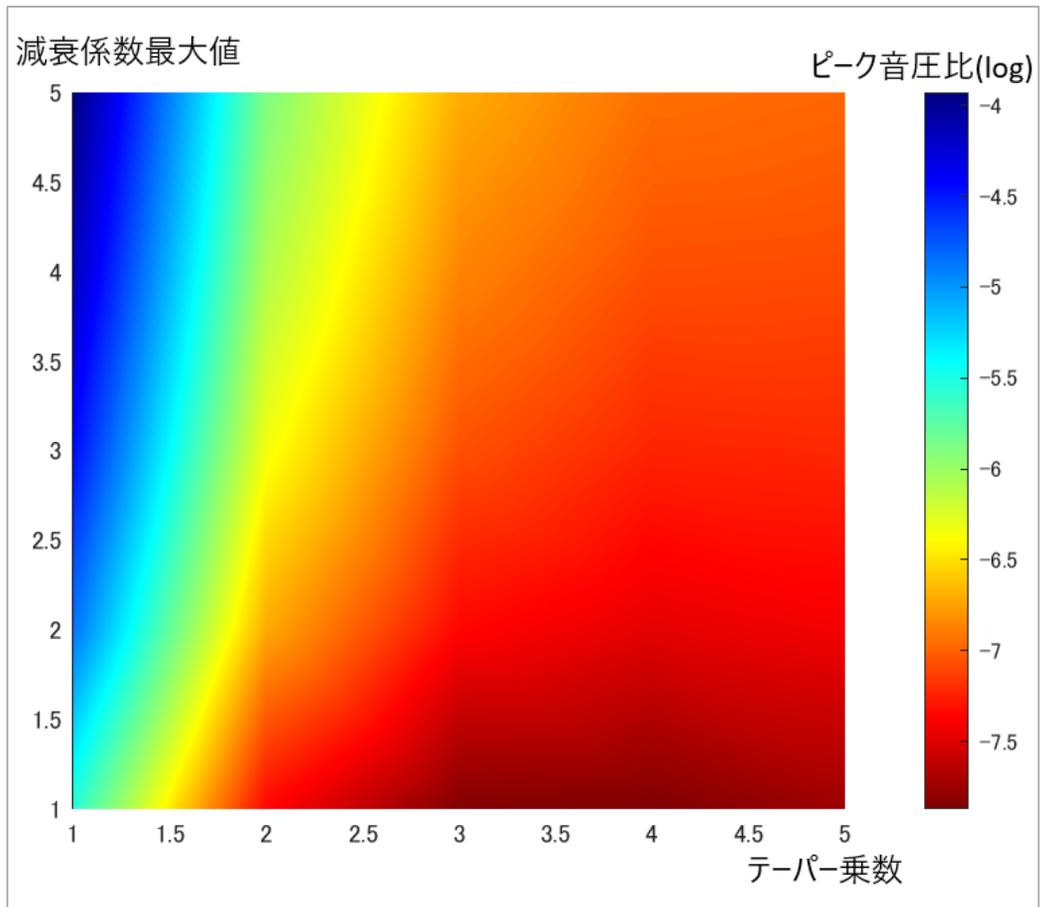


図 5.6 層数 64 におけるピーク音圧比

6. 結果

6.1 層数 16

まず初めに、前述した図 5.5 より、テーパー乗数を 1.0~5.0、減衰係数最大値 1.0~5.0 の間で変化させると、減衰係数最大値は 5.0~1.0 と小さくなっていくごとにピーク音圧比は小さくなっていき、対応するテーパー乗数の最適値は 4.0~3.0 とゆるやかに小さくなっていくことがわかる。よって、層数 16 の最適値について、減衰係数最大値は 1.0 より小さく、テーパー乗数は 3.0 より小さいと仮定した。そこで、テーパー乗数を 0.5~3.0、減衰係数最大値を 0.2~1.2 の間で変化させ、ピーク音圧比を計測した。その結果を図 6.1 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパ乗数 \ 減衰係数最大値	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.2	0.006478	0.003096	0.007886	0.018412	0.033737	0.053116
0.4	0.014502	0.006212	0.004066	0.003433	0.003446	0.003805
0.6	0.024223	0.009349	0.005898	0.004851	0.004681	0.004963
0.8	0.035374	0.012507	0.007667	0.006145	0.005790	0.005987
1.0	0.047861	0.015686	0.009378	0.007385	0.006812	0.006916
1.2	0.061603	0.018888	0.011035	0.008548	0.007761	0.007741

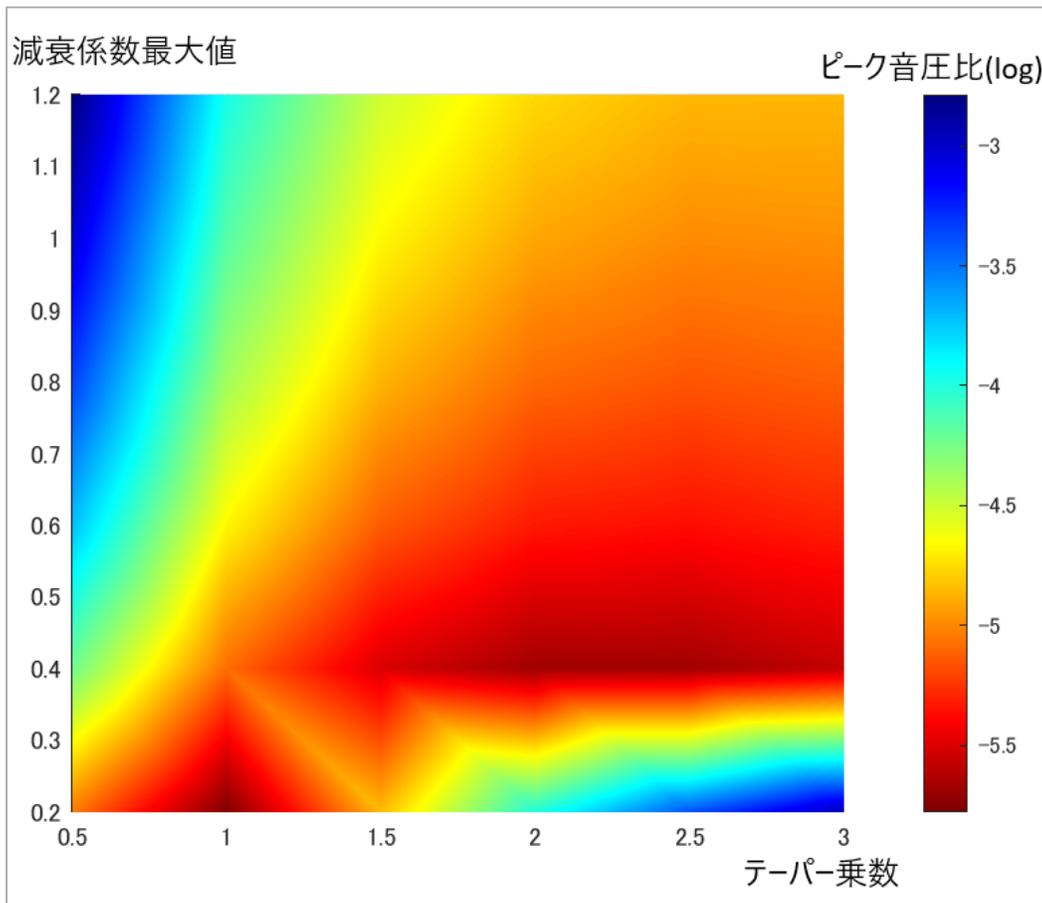


図 6.1 層数 16、テーパ乗数 0.5~3.0、減衰係数最大値 0.20~1.20

続いて、図 6.1 より、テーパ乗数は 1.0~2.0、減衰係数最大値は 0.20~0.40 付近に最適値があることがわかる。そこで、テーパ乗数を 0.8~2.2、減衰係数最大値を 0.10~0.50 の間で変化させ、ピーク音圧比を計測した。その結果を図 6.2 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパ乗数 減衰係数最大値	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2
0.10	0.045908	0.065225	0.08705	0.110778	0.135866	0.161851	0.188357	0.215078
0.15	0.007085	0.011990	0.018476	0.026514	0.036003	0.046801	0.058746	0.071672
0.20	0.003946	0.003096	0.003944	0.006380	0.009590	0.013601	0.018412	0.023998
0.25	0.004974	0.003873	0.003193	0.002762	0.002573	0.003981	0.005811	0.008092
0.30	0.006017	0.004651	0.003817	0.003289	0.002957	0.002769	0.002678	0.002757
0.35	0.007075	0.005431	0.004436	0.003810	0.003408	0.003184	0.003060	0.003031
0.40	0.008146	0.006212	0.005051	0.004325	0.003858	0.003588	0.003433	0.003388
0.45	0.009231	0.006994	0.005662	0.004833	0.004301	0.003982	0.003802	0.003732
0.50	0.010329	0.007778	0.006270	0.005336	0.004737	0.004366	0.004161	0.004062

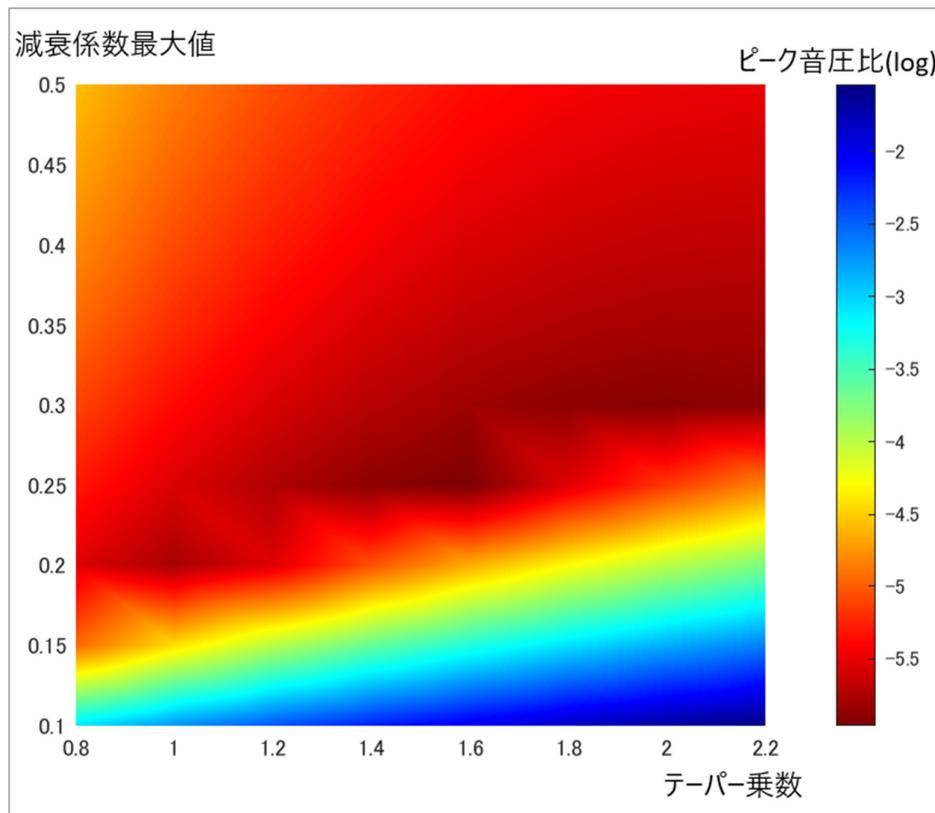


図 6.2 層数 16、テーパ乗数 0.8~2.2、減衰係数最大値 0.10~0.50

続いて、図 6.2 より、テーパ乗数は 1.4~1.6 付近、減衰係数最大値は 0.25 付近に最適値があることがわかる。そこで、テーパ乗数を 1.2~1.8、減衰係数最大値を 0.24~0.30 の間で変化させ、ピーク音圧比を計測した。その結果を図 6.3 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパ乗数 \ 減衰係数最大値	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
0.24	0.003068	0.002834	0.002655	0.002645	0.003345	0.004157	0.005086
0.25	0.003193	0.002948	0.002762	0.002615	0.002573	0.003226	0.003981
0.26	0.003318	0.003062	0.002868	0.002714	0.002589	0.002505	0.003117
0.27	0.003443	0.003175	0.002974	0.002813	0.002681	0.002583	0.002515
0.28	0.003568	0.003288	0.003079	0.002911	0.002774	0.002671	0.002600
0.29	0.003692	0.003401	0.003184	0.003009	0.002865	0.002760	0.002685
0.30	0.003817	0.003514	0.003289	0.003107	0.002957	0.002848	0.002769

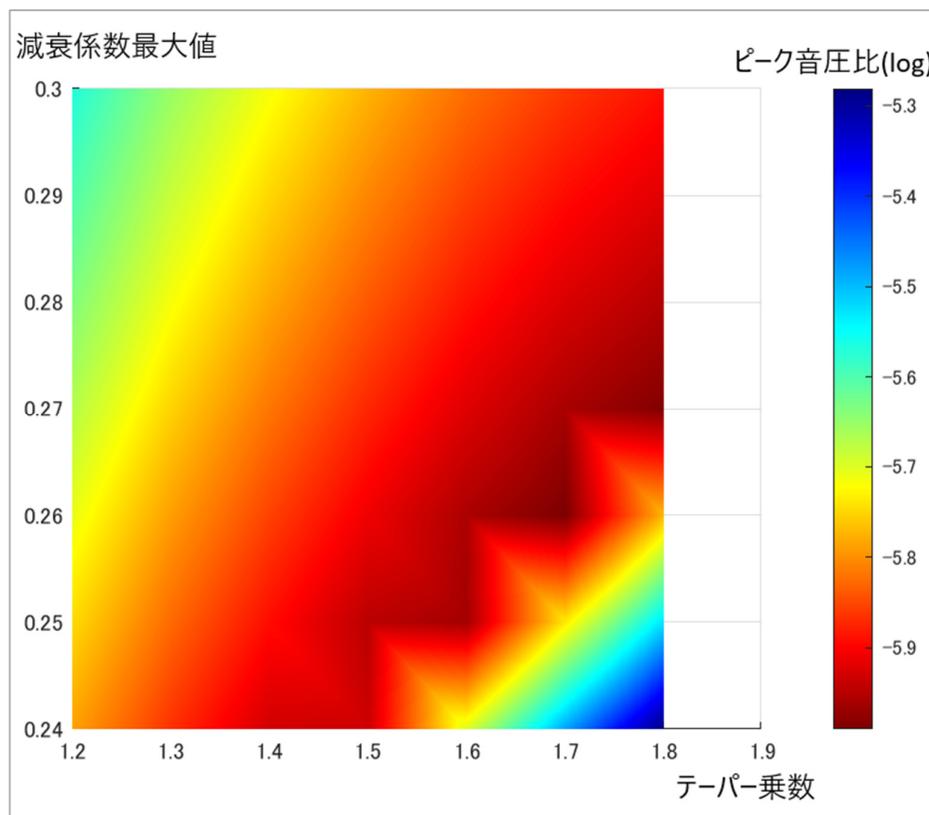


図 6.3 層数 16、テーパ乗数 1.2~1.8、減衰係数最大値 0.24~0.30

図 6.3 より、層数 16 において、テーパ乗数は 1.7、減衰係数最大値は 0.26 が最適値である。

6.2 層数 32

次に、層数 32 の場合についての検討をする。層数 16 の場合と同様に、テーパ乗数および減衰係数最大値を変化させ、ピーク音圧比が最小となる最適値を探索した推移を図 6.4～6.7 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパ乗数 \ 減衰係数最大値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	0.007778	0.002280	0.001716	0.001857	0.002216
2.0	0.015686	0.004161	0.002769	0.002717	0.003038
3.0	0.023732	0.005825	0.003644	0.003385	0.003642
4.0	0.031922	0.007385	0.004412	0.003943	0.004133
5.0	0.040265	0.008829	0.005102	0.004439	0.004558

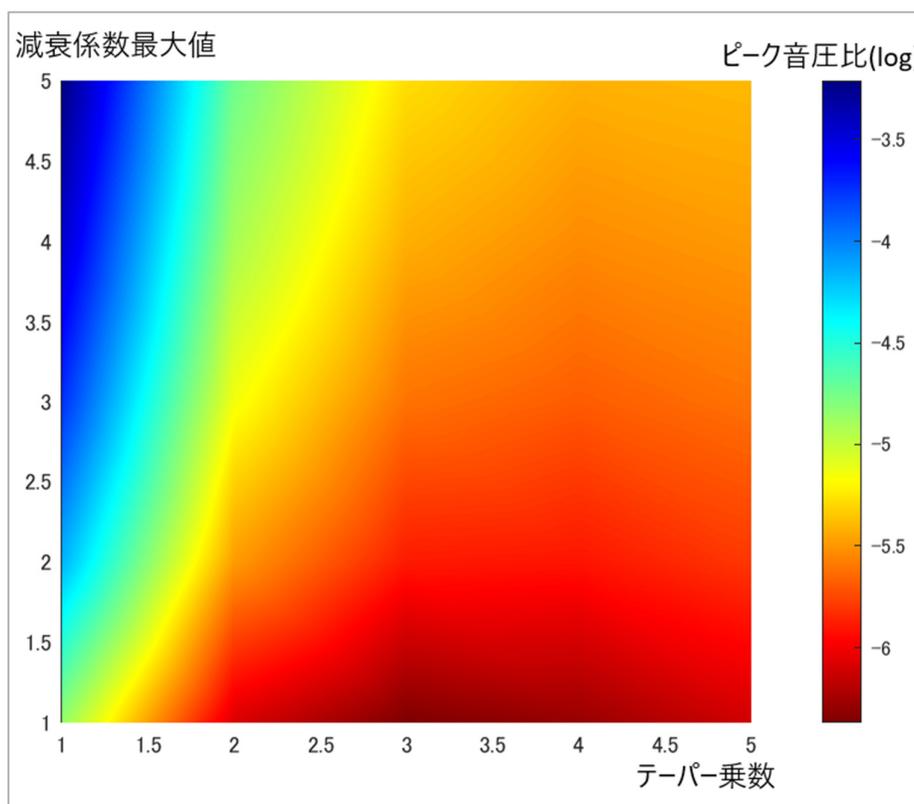


図 6.4 層数 32、テーパ乗数 1.0~5.0、減衰係数最大値 1.00~5.00

テーパ乗数 減衰係数最大値	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.2	0.004409	0.001545	0.000769	0.000516	0.000884	0.002197
0.4	0.009627	0.003096	0.001514	0.000991	0.000869	0.000898
0.6	0.015601	0.004651	0.002236	0.001440	0.001210	0.001198
0.8	0.022450	0.006212	0.002939	0.001866	0.001527	0.001468
1.0	0.030023	0.007778	0.003624	0.002280	0.001825	0.001716
1.2	0.038284	0.009349	0.004294	0.002678	0.002107	0.001949

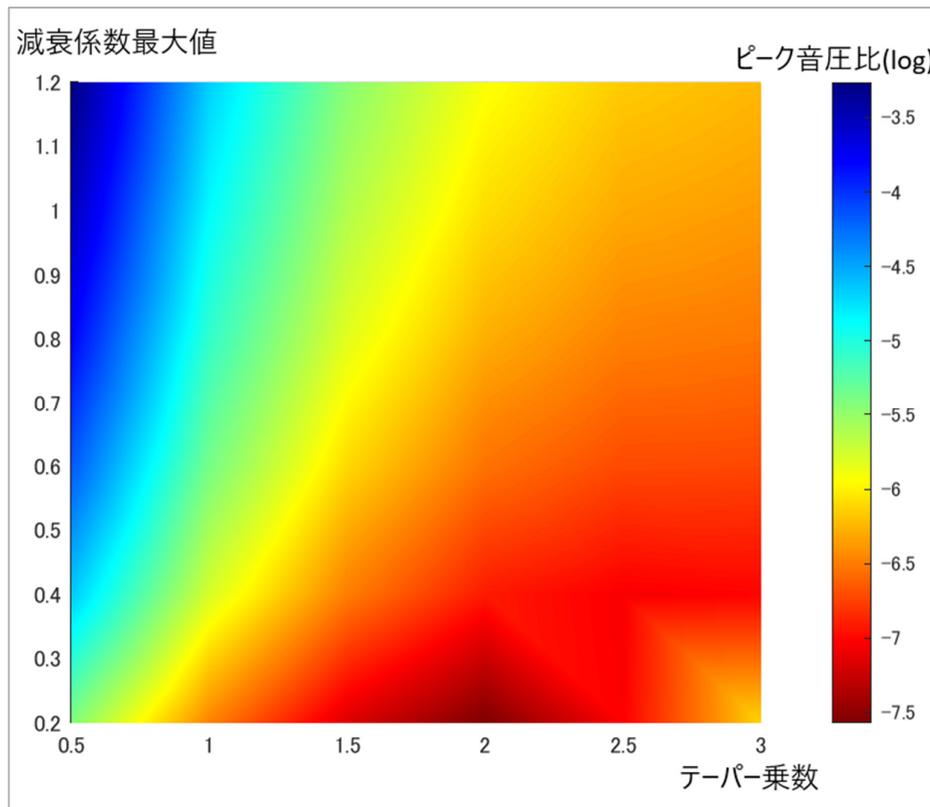


図 6.5 層数 32、テーパ乗数 0.5~3.0、減衰係数最大値 0.20~1.20

テーパ乗数 減衰係数最大値	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
0.10	0.001314	0.002667	0.004765	0.007729	0.011641	0.016535	0.022413	0.029246	0.036986
0.15	0.001665	0.001159	0.000848	0.000650	0.000905	0.001532	0.002417	0.003601	0.005120
0.20	0.002232	0.001545	0.001128	0.000862	0.000694	0.000582	0.000516	0.000487	0.000713
0.25	0.002805	0.001932	0.001408	0.001073	0.000863	0.000723	0.000638	0.000597	0.000587
0.30	0.003383	0.002320	0.001686	0.001284	0.001030	0.000862	0.000758	0.000704	0.000686
0.35	0.003967	0.002708	0.001963	0.001493	0.001196	0.000999	0.000875	0.000808	0.000782
0.40	0.004555	0.003096	0.002238	0.001701	0.001360	0.001134	0.000991	0.000911	0.000876
0.45	0.005149	0.003484	0.002513	0.001907	0.001523	0.001268	0.001105	0.001011	0.000967
0.50	0.005748	0.003873	0.002787	0.002113	0.001684	0.001401	0.001219	0.001111	0.001057

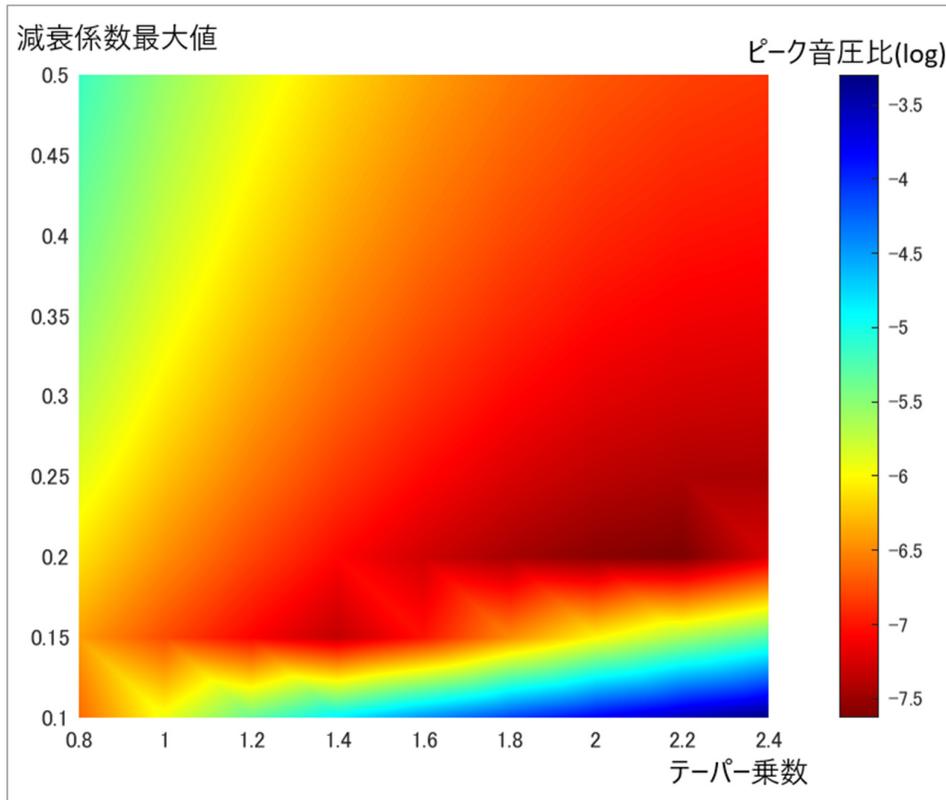


図 6.6 層数 32、テーパ乗数 0.8~2.4、減衰係数最大値 0.10~0.50

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
0.16	0.000618	0.000557	0.000727	0.000953	0.001225	0.001549	0.001930	0.002371	0.002876
0.17	0.000656	0.000591	0.000539	0.000593	0.000774	0.000993	0.001254	0.001561	0.001917
0.18	0.000694	0.000625	0.000570	0.000525	0.000492	0.000637	0.000816	0.001028	0.001278
0.19	0.000732	0.000659	0.000601	0.000554	0.000518	0.000491	0.000531	0.000677	0.000852
0.20	0.000769	0.000694	0.000632	0.000582	0.000544	0.000516	0.000497	0.000487	0.000568
0.21	0.000807	0.000727	0.000663	0.000610	0.000571	0.000540	0.000521	0.000510	0.000505
0.22	0.000845	0.000761	0.000693	0.000639	0.000597	0.000565	0.000544	0.000532	0.000527
0.23	0.000883	0.000795	0.000724	0.000667	0.000623	0.000589	0.000567	0.000553	0.000548
0.24	0.000920	0.000829	0.000755	0.000695	0.000648	0.000614	0.000590	0.000575	0.000568

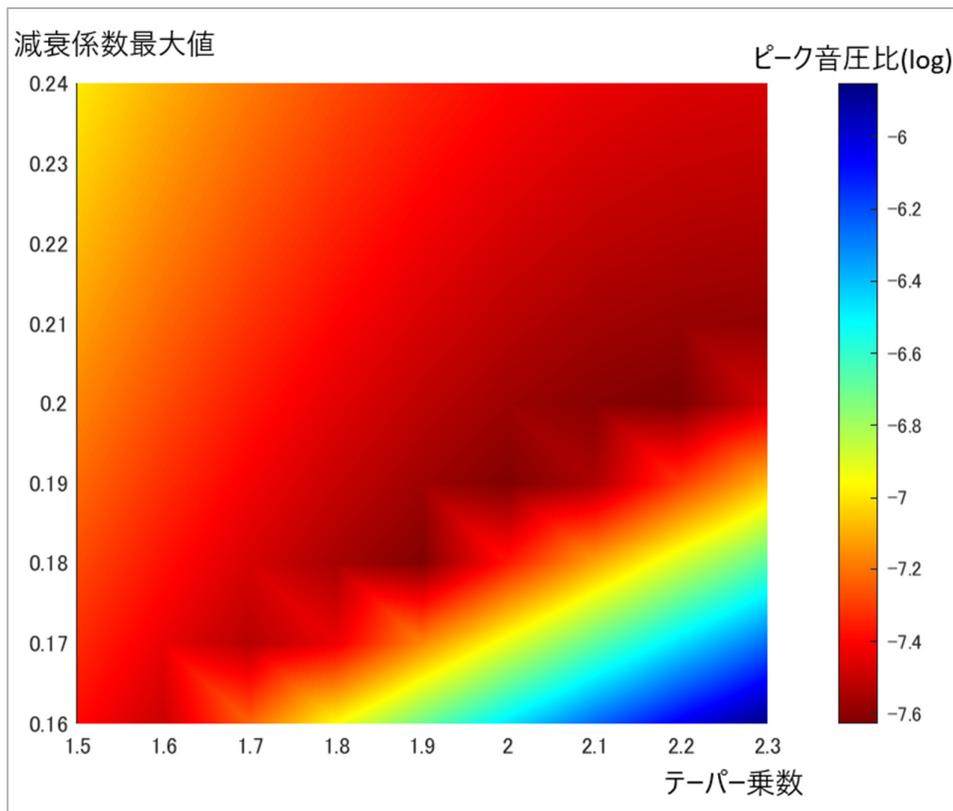


図 6.7 層数 32、テーパ乗数 1.5~2.3、減衰係数最大値 0.16~0.24

図 6.4~6.7 より、層数 32 において、テーパ乗数は 2.0、減衰係数最大値は 0.19 が最適値である。

6.3 層数 48

次に、層数 48 の場合についての検討をする。先ほどと同様に、テーパー乗数および減衰係数最大値を変化させ、ピーク音圧比が最小となる最適値を探索した推移を図 6.8～6.11 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパー乗数 \ 減衰係数最大値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	0.005171	0.001092	0.000724	0.000743	0.00086
2.0	0.010399	0.002052	0.001188	0.001103	0.001194
3.0	0.015686	0.002934	0.001581	0.001386	0.001443
4.0	0.021034	0.003761	0.001933	0.001628	0.001649
5.0	0.026446	0.004549	0.002256	0.001843	0.001830

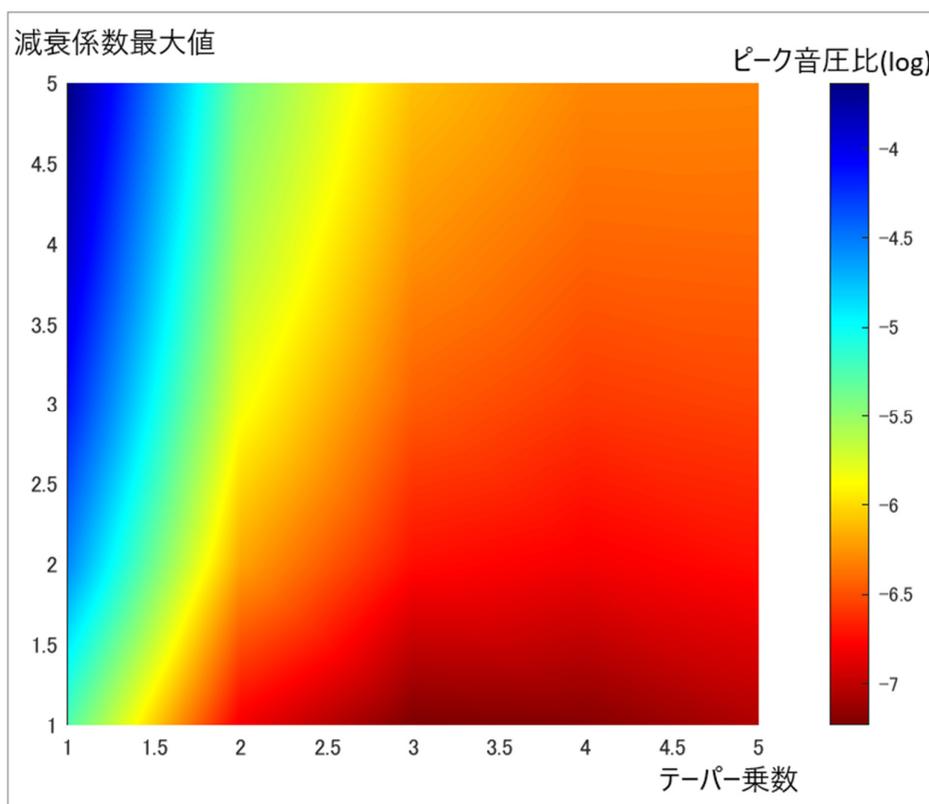


図 6.8 層数 48、テーパー乗数 1.0~5.0、減衰係数最大値 1.00~5.00

テーパ乗数 減衰係数最大値	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.2	0.003536	0.00103	0.000422	0.000236	0.000209	0.000224
0.4	0.007624	0.002062	0.000836	0.000461	0.000375	0.000372
0.6	0.012212	0.003096	0.001243	0.000678	0.000526	0.000500
0.8	0.017350	0.004132	0.001643	0.000888	0.000667	0.000616
1.0	0.023048	0.005171	0.002037	0.001092	0.000802	0.000724
1.2	0.029226	0.006212	0.000422	0.001293	0.000932	0.000825

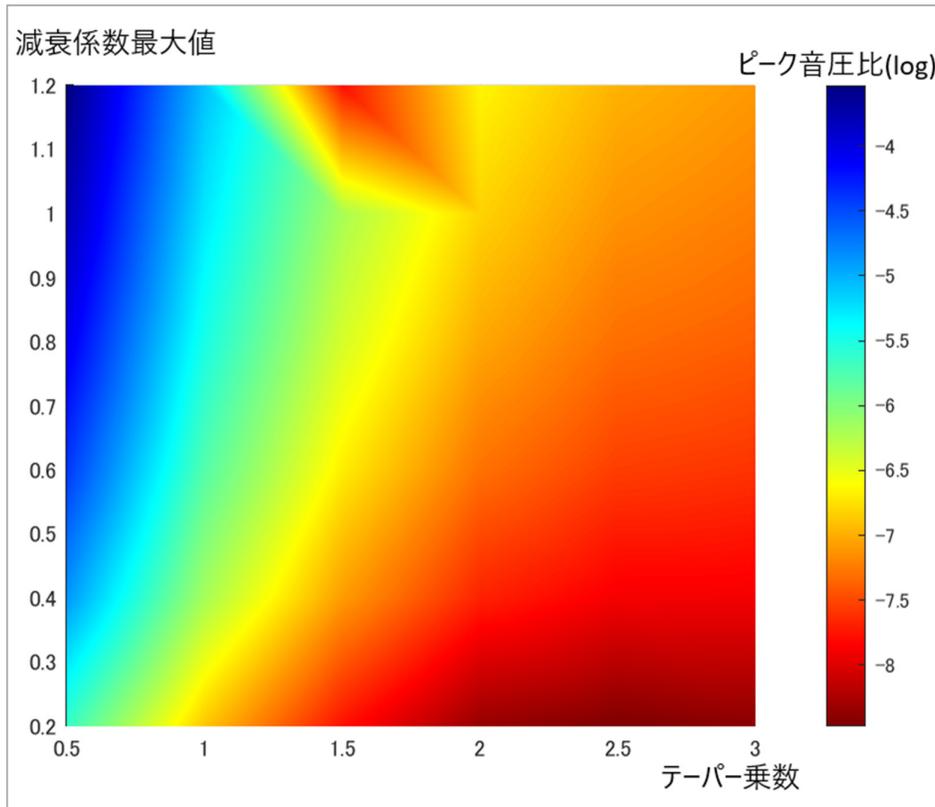


図 6.9 層数 48、テーパ乗数 0.5~3.0、減衰係数最大値 0.20~1.20

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0.10	0.000538	0.000995	0.001686	0.002661	0.003968	0.005645	0.007721	0.010219	0.013151
0.15	0.000371	0.000275	0.000215	0.000179	0.000180	0.000306	0.000489	0.000744	0.001087
0.20	0.000493	0.000366	0.000286	0.000236	0.000215	0.000210	0.000211	0.000216	0.000224
0.25	0.000614	0.000456	0.000355	0.000293	0.000264	0.000254	0.000253	0.000257	0.000264
0.30	0.000735	0.000546	0.000425	0.000350	0.000312	0.000298	0.000294	0.000296	0.000302
0.35	0.000856	0.000635	0.000493	0.000406	0.000360	0.000340	0.000333	0.000333	0.000338
0.40	0.000975	0.000724	0.000562	0.000461	0.000406	0.000381	0.000371	0.000369	0.000372
0.45	0.001095	0.000813	0.000630	0.000516	0.000453	0.000422	0.000408	0.000404	0.000406
0.50	0.001214	0.000901	0.000698	0.000570	0.000498	0.000462	0.000445	0.000438	0.000438

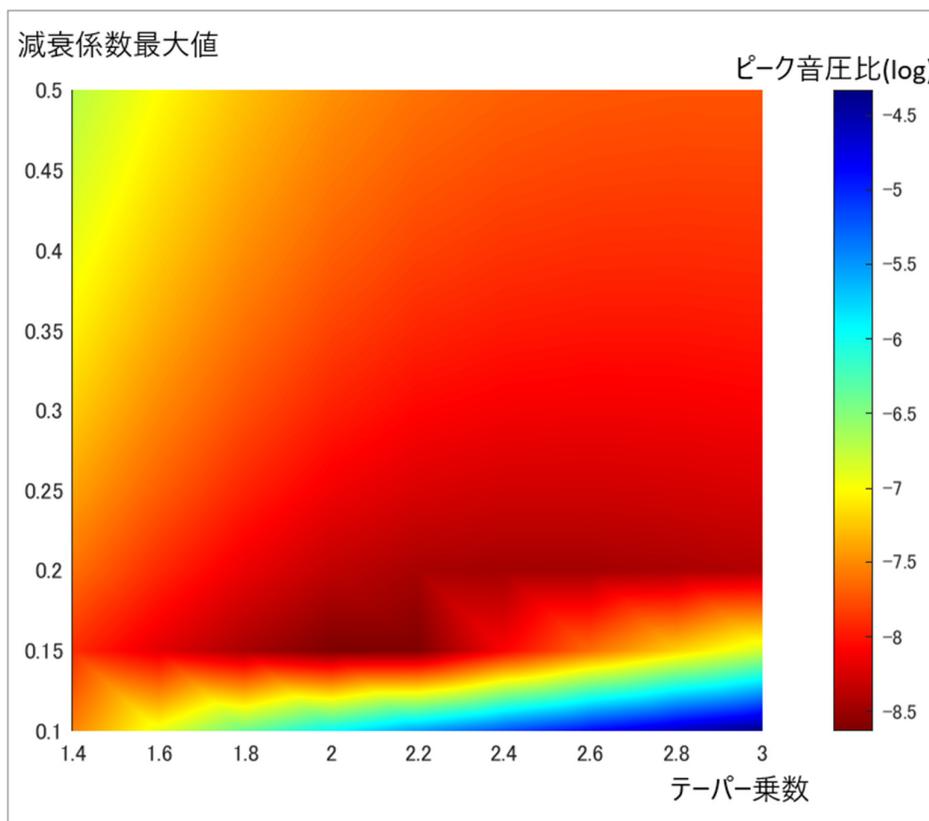


図 6.10 層数 48、テーパ乗数 1.4~3.0、減衰係数最大値 0.10~0.50

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
0.12	0.000304	0.000412	0.000547	0.000713	0.000913	0.001151	0.001431	0.001757	0.002132	0.002559
0.13	0.000210	0.000204	0.000277	0.000369	0.000483	0.000620	0.000785	0.000981	0.001209	0.001474
0.14	0.000226	0.000201	0.000181	0.000191	0.000255	0.000334	0.000431	0.000548	0.000686	0.000849
0.15	0.000242	0.000215	0.000194	0.000179	0.000169	0.000180	0.000237	0.000306	0.000389	0.000489
0.16	0.000258	0.000229	0.000207	0.000190	0.000180	0.000175	0.000173	0.000173	0.000221	0.000282
0.17	0.000273	0.000243	0.000219	0.000202	0.000191	0.000185	0.000182	0.000182	0.000183	0.000185
0.18	0.000289	0.000257	0.000232	0.000213	0.000201	0.000195	0.000192	0.000191	0.000192	0.000193
0.19	0.000305	0.000272	0.000245	0.000225	0.000212	0.000205	0.000201	0.000200	0.000201	0.000202
0.20	0.000321	0.000286	0.000257	0.000236	0.000223	0.000215	0.000211	0.000210	0.000209	0.000211
0.21	0.000337	0.000300	0.000270	0.000248	0.000233	0.000225	0.000220	0.000219	0.000218	0.000219

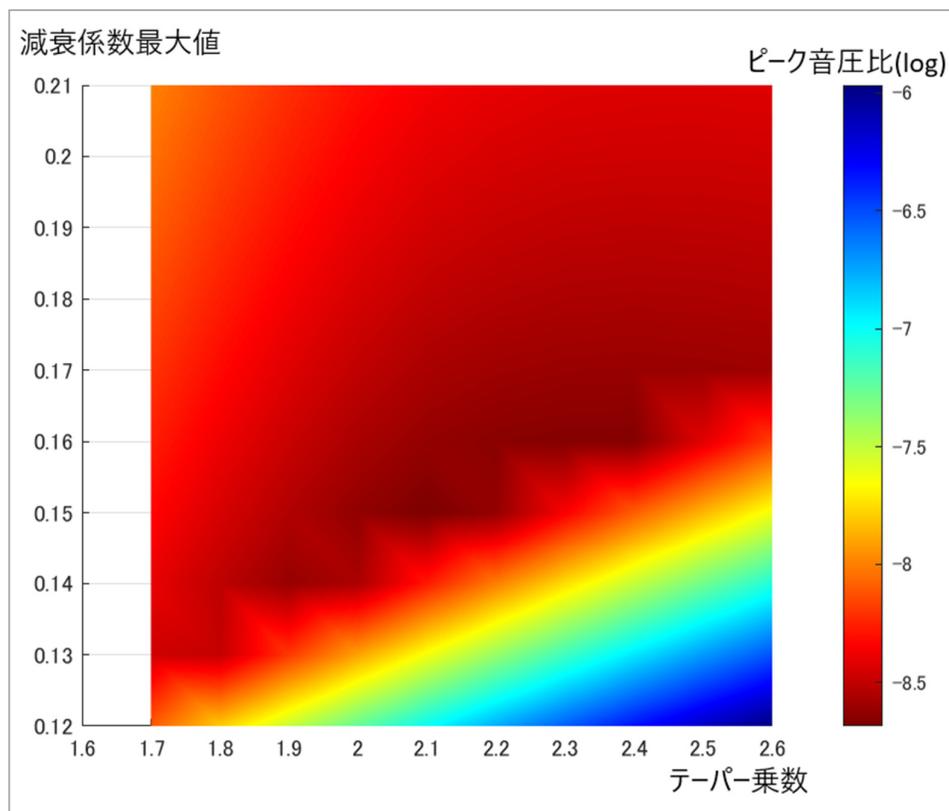


図 6.11 層数 48、テーパ乗数 1.7~2.6、減衰係数最大値 0.12~0.21

図 6.8~6.11 より、層数 48 において、テーパ乗数は 2.1、減衰係数最大値は 0.15 が最適値である。

6.4 層数 64

次に、層数 64 の場合についての検討をする。先ほどと同様に、テーパ乗数および減衰係数最大値を変化させ、ピーク音圧比が最小となる最適値を探索した推移を図 6.12～6.14 に示す。なお、グラフ上にてピーク音圧比は比較を容易にする目的で対数変換を行った。

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	0.003873	0.000638	0.000387	0.000382	0.000431
2.0	0.007778	0.001219	0.000640	0.000570	0.000602
3.0	0.011715	0.001761	0.000857	0.000720	0.000732
4.0	0.015686	0.002280	0.001053	0.000850	0.000839
5.0	0.019692	0.002775	0.001234	0.000965	0.000933

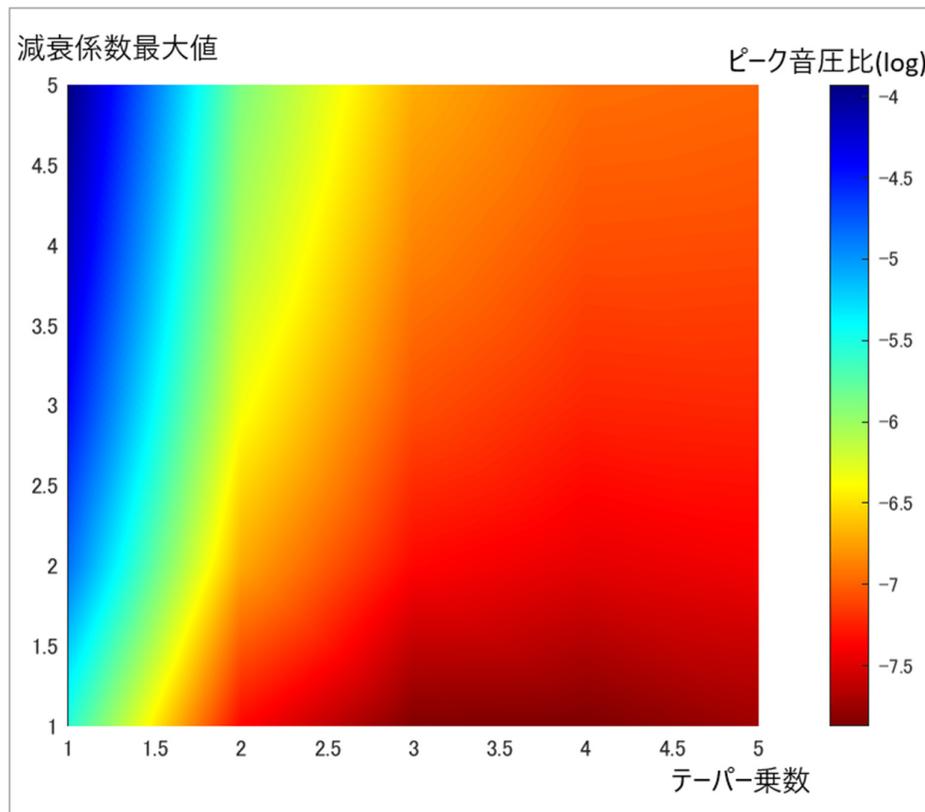


図 6.12 層数 64、テーパ乗数 1.0～5.0、減衰係数最大値 1.00～5.00

テーパ乗数 減衰係数最大値	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
0.10	0.000166	0.000117	0.000172	0.000316	0.000538	0.000861	0.001307	0.001900
0.15	0.000248	0.000174	0.000129	0.000102	0.000092	0.000089	0.000090	0.000092
0.20	0.000331	0.000232	0.000171	0.000135	0.000120	0.000115	0.000114	0.000115
0.25	0.000412	0.000289	0.000214	0.000168	0.000147	0.000140	0.000137	0.000137
0.30	0.000494	0.000347	0.000256	0.000200	0.000174	0.000164	0.000159	0.000158
0.35	0.000575	0.000404	0.000298	0.000233	0.000201	0.000187	0.000181	0.000179

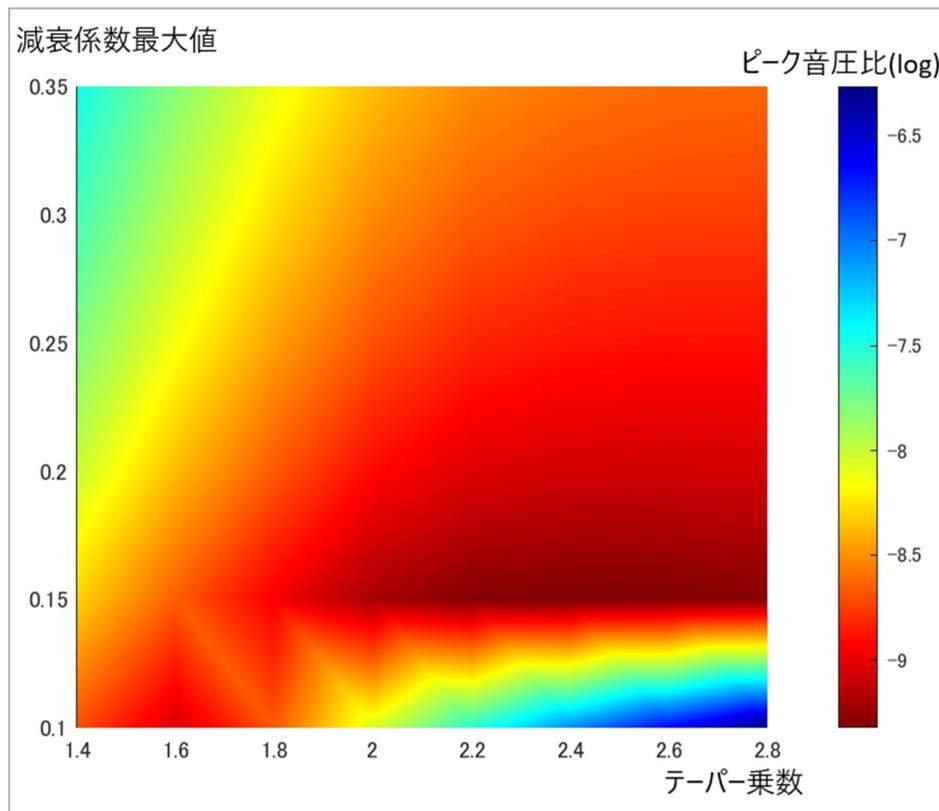


図 6.13 層数 64、テーパ乗数 1.4~2.8、減衰係数最大値 0.10~0.35

テーパー乗数 減衰係数最大値	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
0.11	0.0001320	0.0001787	0.0002373	0.0003097	0.0003980	0.0005041	0.0006302
0.12	0.0000816	0.0000768	0.0001047	0.0001400	0.0001840	0.0002381	0.0003038
0.13	0.0000883	0.0000827	0.0000802	0.0000791	0.0000851	0.0001125	0.0001465
0.14	0.0000950	0.0000888	0.0000859	0.0000845	0.0000841	0.0000843	0.0000850
0.15	0.0001016	0.0000948	0.0000916	0.0000900	0.0000894	0.0000894	0.0000900
0.16	0.0001083	0.0001009	0.0000972	0.0000954	0.0000945	0.0000944	0.0000949
0.17	0.0001149	0.0001069	0.0001028	0.0001007	0.0000996	0.0000994	0.0000998

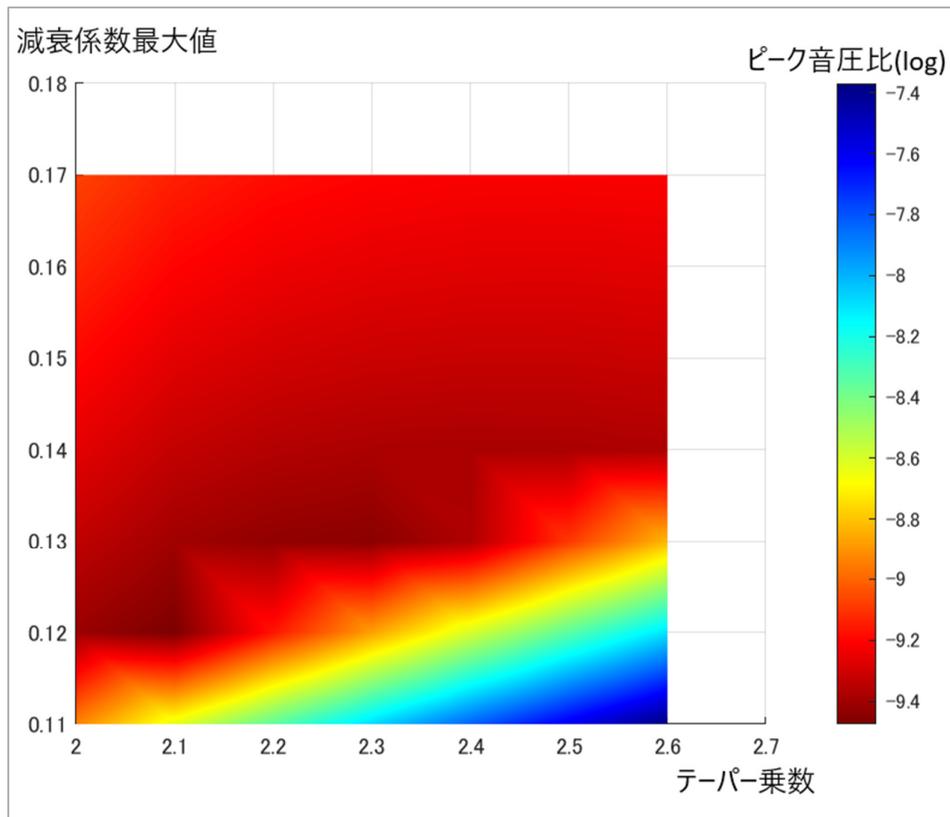


図 6.14 層数 64、テーパー乗数 2.0~2.6、減衰係数最大値 0.11~0.17

図 6.12~6.14 より、層数 64 において、テーパー乗数は 2.1、減衰係数最大値は 0.12 が最適値である。

7. 考察とまとめ

PML の性能を決定する要素である層数、テーパー乗数、減衰係数最大値は次のように決定する。層数を増やすことで PML の吸収性能は向上するが、その一方で計算量が増大するため、計算コストとのバランスを考慮した適切な層数を設定する必要がある。その上で、各層数に対して最適なテーパー乗数および減衰係数最大値を選定した。層数を 16 層から 64 層まで 16 層刻みで変化させ、それぞれの層数に対して最適化を行った場合のピーク音圧比を図 7.1 に示す。

層数	16	32	48	64
テーパー乗数	1.7	2.0	2.1	2.1
減衰係数最大値	0.26	0.19	0.15	0.12
ピーク音圧比	0.00250492	0.00049139	0.00016909	0.00007679

図 7.1 層数ごとの最適な PML を設定した場合のピーク音圧比

1 次元音場を対象として PML の最適化を行った結果、既往研究で示されている最適条件には音場の次元を任意に設定するには一部不十分な点が含まれていることが明らかとなった。このことから、条件設定の工夫により、今後さらなる PML の性能向上が期待できる。

図 7.1 より、層数と最適なテーパー乗数および減衰係数最大値、ピーク音圧比との関係を、それぞれ図 7.2~7.4 に示す。各図では算出した値をプロット点として示し、それらに対する近似曲線を併せて描いている。

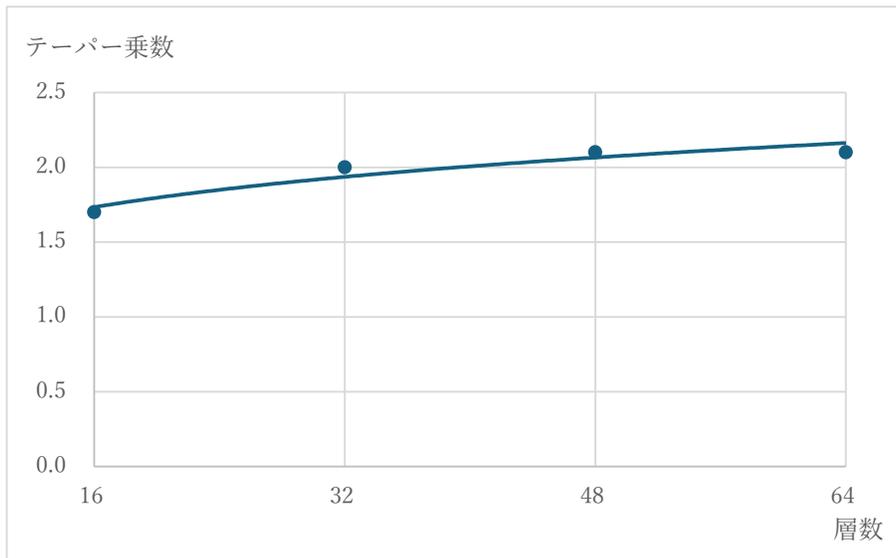


図 7.2 層数と最適なテーパ乗数の関係図

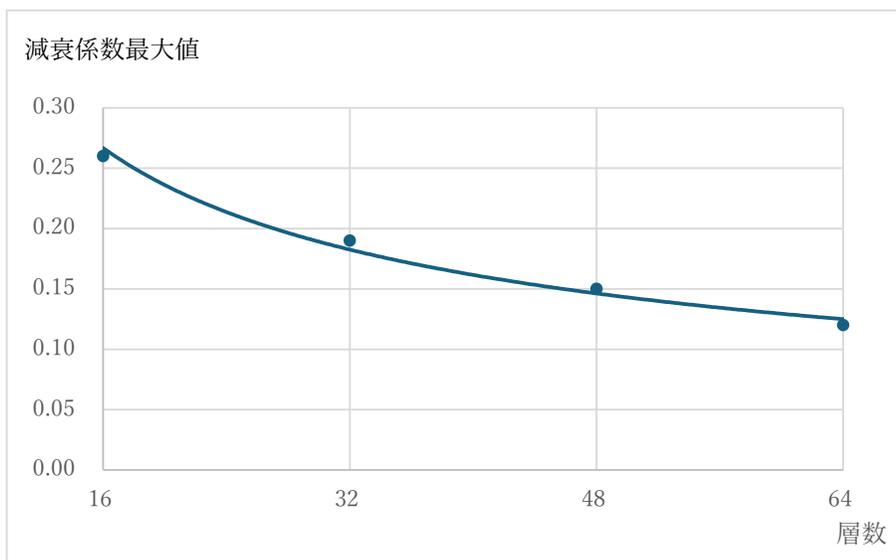


図 7.3 層数と最適な減衰係数最大値の関係図

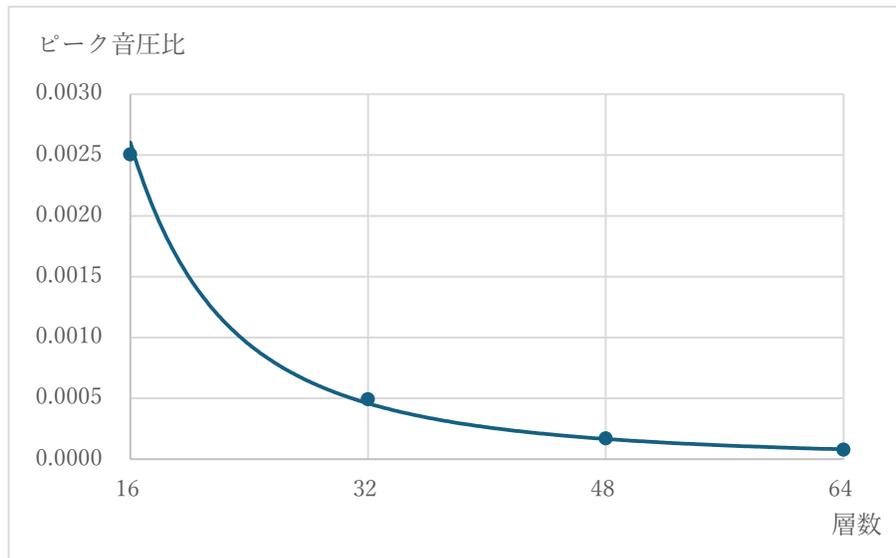


図 7.4 層数とピーク音圧比の関係図

図 7.2～7.4 より、層数を入力すると、最適なテーパ乗数および減衰係数最大値、ピーク音圧比を求めることができる回帰式を提案する。それぞれの最適値を y 、層数を x とすれば、これらの近似曲線の式は次式で表される。

テーパ乗数について

$$y = 1.1144x^{0.1594} \quad (7.1)$$

減衰係数最大値について

$$y = 1.2151x^{-0.547} \quad (7.2)$$

ピーク音圧比について

$$y = 2.7101x^{-2.506} \quad (7.3)$$

この式により、どのような層数でも最適値を求めることが可能である。

参考文献

- [1] 豊田政弘他, 「FDTD 法で視る音の世界」, コロナ社, 東京, 2015.
- [2] 日比野真之, 「FDTD 法における完全吸収層(PML)の最適化」, 関西大学卒業論文, 2017.
- [3] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans. Antennas Propag., 14, 302-307, 1966.
- [4] 田口大悟, 「FDTD 法における完全吸収層(PML)の減衰量」, 関西大学卒業論文, 2016.

謝辞

本研究を進めるにあたり、お忙しい中ご指導・ご鞭撻して頂きました豊田政弘先生にこの場をお借りして心より深くお礼申し上げます。また、建築環境工学第一研究室の皆様からは、研究に有益な助言を頂き、心より深くお礼申し上げます。