波動方程式に基づいた固体伝搬音の高速解析手法の開発

関西大学 環境都市工学部 建築学科
建築環境工学第 I 研究室
建 21-65　夏山 匠
指導教員　豊田 政弘

目次

1　序論

1.1　研究背景

建築空間の音場や振動場の解析には波動音響理論に基づいた手法が存在する。波動音響理論とは、波の伝搬、反射、回折、干渉などの波動現象を理解するための理論的枠組みである。この理論は、建築音響学の基礎を成しており、波の性質や振る舞いを数学的に記述する。この理論に基づいた解析では、波動方程式を解くことで予測を行うため、高精度の結果を得られるが、一方で多大な計算時間を必要とするという欠点もある。波動音響理論に基づいた解析手法は離散化の特徴により大きく有限要素法、境界要素法、有限差分法に分けることができる。本研究では、有限差分法の一種である時間領域有限差分法（Finite-Difference Time-Domain 法、FDTD 法）[1]を用いて解析を行う。

流体である空気中を伝搬する空気伝搬音は波動音響理論に基づいた高速な計算手法が確立されており、比較的短時間で音場解析を行うことができる。しかし、固体中を伝搬する固体伝搬音の場合はまだ十分に高速な手法が確立されているとはいえず、膨大な計算時間がかかることが多い。そこで、床衝撃音に代表される固体伝搬音の予測計算を高速化することで、遮音性能を低コストで評価することが可能となり、遮音設計がより容易になると考えたため、本研究に取り組むこととした。

1.2　研究目的

流体の FDTD 法には Standard FDTD (S-FDTD)法、Wave Equation FDTD (WE-FDTD)法、Compact Explicit FDTD (CE-FDTD)法が提案されている。固体の FDTD 法には S-FDTD 法しか提案されておらず、膨大な計算時間がかかってしまうという課題がある。本研究では、流体の WE-FDTD 法の考え方を応用することで、高精度で高速な固体の WE-FDTD 法を提案することを目的とする。

2　研究手法

2.1　FDTD 法の概要

FDTD 法は、Yee[2]によって開発された数値解析手法の一つである。有限差分法とは音場を空間的、時間的に離散化し、支配式となる微分方程式の微分係数を差分商で近似する解析手法の総称である。Fig. 2.1.1 に示す格子を Yee セルと呼ぶ。空間的に離散化された一つのセルには音圧と粒子速度が互い違いに配置されている。また、Fig. 2.1.2 はスタガードグリッドと呼ばれる互い違いの格子を示しており、このグリッド上に離散的に定義された物理量を時間が発展するように交互に計算する。これをリープフロッグアルゴリズムと呼ぶ。

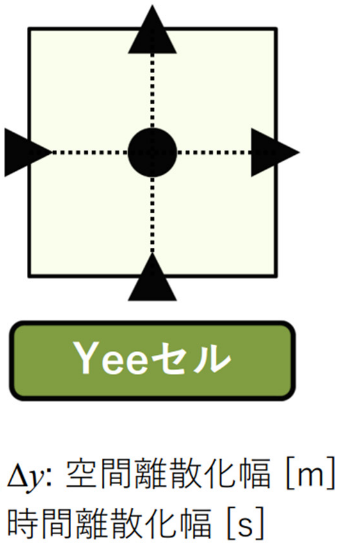

Fig. 2.1.1 Yee セル

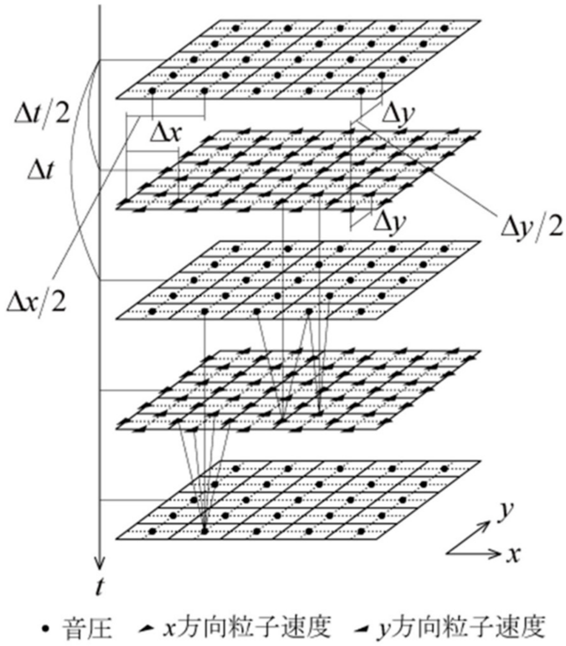

Fig. 2.1.2 スタガードグリッド

2.2　固体の波動方程式[3]

Fig. 2.2.1 のようなx, y, zの直交座標空間に各辺がそれぞれ$\Delta x, \Delta y, \Delta z$[m]で密度が$\rho$ [kg/㎥]の微小体積がある。この物体のx, y, z方向の変位をそれぞれu_x, u_y, u_z[m]とする。この時$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が微小量であることを考慮すれば、三方向の運動方程式は Newton の運動の第二法則により、

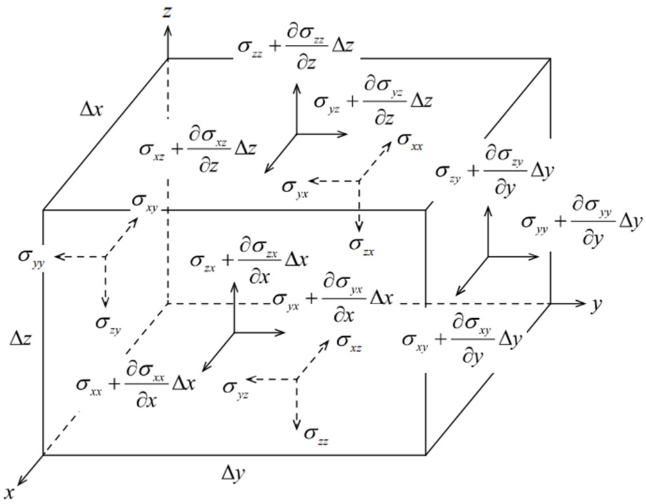

Fig. 2.2.1　微小体積にかかる力

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \tag{2.2.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \tag{2.2.2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{2.2.3}$$

と表せる。σ_{ij}[Pa]はj方向を法線とする面にかかるi方向の応力を表し、$i, j = x, y, z$である。この微小体積が回転しないものとすると、$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$である。

固体に発生する応力が変位勾配、すなわち、ひずみに比例して生じるものと考えれば、応力は

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial l} \tag{2.2.4}$$

という線形結合の形で書ける。ここで、$k, l = x, y, z$である。これを Hooke の法則とよぶ。微小体積には粘性がなく、また、等方性を有していると仮定すると式(2.2.4)は

$$\sigma_{ij} = A\left(\frac{\partial u_j}{\partial i} + \frac{\partial u_i}{\partial j}\right) + B\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\delta_{ij} \tag{2.2.5}$$

と書き換えられる。δ_{ij}は$i = j$の時 1、$i \neq j$の時 0 であり、Kronecker のデルタと呼ばれる。

式(2.2.5)の右辺第一項はせん断変形に関する応力、第二項は体積変化に対する応力であり、これらにかかる係数 A, B をそれぞれ A=μ、B=λ と置き換える。ここで、μ[Pa]は第一 Lamé 定数(せん断弾性係数)、λ[Pa]を第二 Lamé 定数と呼ぶ。

ここで、式(2.2.5)を式(2.2.1)（2.2.2)（2.2.3）に代入すれば、

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla^T\mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.2.6}$$

となる。ここで、

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

である。恒等式

$$\nabla_\times\nabla_\times\mathbf{u} = \nabla(\nabla^T\mathbf{u}) - \nabla^2\mathbf{u}$$
$$\leftrightarrow \nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla^T\mathbf{u}) - \nabla_\times\nabla_\times\mathbf{u} \tag{2.2.7}$$

を式(2.2.6)に代入すれば

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla^T\mathbf{u}) - \mu\nabla_\times\nabla_\times\mathbf{u} \tag{2.2.8}$$

となる。ここで、

$$\nabla_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 = \nabla^T\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。Helmholtz の定理より、

$$\mathbf{u} = -\nabla\varphi + \nabla_\times\mathbf{\Psi} \tag{2.2.9}$$

と分解できる。ここでφ[㎡]は変位スカラポテンシャル、$\mathbf{\Psi}$[㎡]は変位ベクトルポテンシャルである。

$$\nabla_\times\nabla\varphi = 0 \tag{2.2.10}$$

$$\nabla^T\nabla_\times\mathbf{\Psi} = 0 \tag{2.2.11}$$

を考慮し、(2.2.9)を(2.2.8)に代入すれば、

$$-\nabla\left\{\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi\right\} + \nabla_\times\left\{\rho\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2} + \mu\nabla_\times\nabla_\times\mathbf{\Psi}\right\} = 0 \tag{2.2.12}$$

となる。また、(2.2.9)を(2.2.7)に代入すれば、

$$\nabla_\times\nabla_\times\mathbf{\Psi} = -\nabla^2\mathbf{\Psi} \tag{2.2.13}$$

が得られ、(2.2.12)は

$$-\nabla\left\{\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi\right\}+\nabla_{\times}\left\{\rho\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2}+\mu\nabla^2\mathbf{\Psi}\right\}=0 \tag{2.2.14}$$

と書き換えられる。したがって、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}={c_L}^2\nabla^2\varphi \quad \left(c_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right) \tag{2.2.15}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2}={c_s}^2\nabla^2\mathbf{\Psi} \quad \left(c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \tag{2.2.16}$$

が求められる。これらが固体の波動方程式である。なお、c_L[m/s]が縦波の位相速度、c_s[m/s]が横波の位相速度である。

2.3　流体の S-FDTD 法

(1)支配式

x, yの直交座標二次元空間に寸法が$\Delta x, \Delta y$[m]で密度がρ[kg/㎥]の空気粒子があり、各面に音圧p[N/㎡]が加わっている状態を考える。空気粒子のx, y方向の変位をそれぞれu_x, u_y[m]とする。この時、$\Delta x, \Delta y$が微小量であることを考慮すれば、x, y方向の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.3.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.3.2}$$

となる。また、空気粒子の各面の変位を考え、$\Delta x, \Delta y$が微小量であることを考慮すれば、空気粒子の増分体積ΔV[㎥]は、

$$\Delta V = (\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})\Delta x \Delta y \tag{2.3.3}$$

となる。断熱変化を仮定すると、音圧と体積変化の関係は、理想気体の状態方程式から、体積弾性率をκ[N/㎡]、変化前の体積をV[㎥]とすると、

$$p = -\kappa \frac{\Delta V}{V} \tag{2.3.4}$$

と表せる。また、体積弾性率と密度、音速c[m/s]には

$$\kappa = \rho c^2 \tag{2.3.5}$$

の関係が成り立つ。式(2.3.3)～式(2.3.5)より

$$p = -\rho c^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \tag{2.3.6}$$

となり、これを音圧に関する連続方程式と呼ぶ。

(2)更新式

S-FDTD 法では式(2.3.1)、(2.3.2)、(2.3.6)を支配式として音場の解析を行う。まず、これらの式を一階の偏微分方程式とするために、式(2.3.6)の両辺を時間微分し、変位の時間微分を粒子速度に置き換える。x, y方向の粒子速度をそれぞれv_x, v_y[m/s]とすれば、解くべき支配式は、

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.3.7}$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.3.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \tag{2.3.9}$$

となる。

音圧や粒子速度は空間や時間に関して連続的に変化するが、計算機では残念ながら連続な関数を扱うことが不可能である。そこで、空間や時間をある単位で区切り、その区切りごとの離散的な値を用いることで連続的な関数を近似する。このように、空間や時間を単位で区切ることを離散化と呼び、空間に関する区切り幅を空間離散化幅、時間に関する幅を時間離散化幅、区切りごとの離散的な値を定めた点を参照点と呼ぶ。Fig. 2.1.1 や Fig. 2.1.2 のように音圧と空気粒子を空間離散化幅の半ステップごとに互い違いに配置する。Fig. 2.1.2 のように音圧と空気粒子を空間離散化幅の半ステップごとに互い違いに配置する。ここで、空間ステップをi,j、時間ステップをnとし、この時の音圧の値を$p^n(i,j)$[N/㎡]、空間ステップがi+0.5,j、時間ステップがn+0.5 であるときのx方向の粒子速度を${v_x}^{n+0.5}(i+0.5,j)$[m/s]などと表記する。ここで、上記支配式を、

$$f'(x) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} \tag{2.3.10}$$

という差分商を用いて近似する。この差分近似の方法を中心差分スキームと呼ぶ。これを適用すれば、式(2.3.7)～(2.3.9)は、

$${v_x}^{n+0.5}(i+0.5,j) = {v_x}^{n-0.5}(i+0.5,j) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x}\{p^n(i+1,j) - p^n(i,j)\} \tag{2.3.11}$$

$${v_y}^{n+0.5}(i,j+0.5) = {v_y}^{n-0.5}(i,j+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y}\{p^n(i,j+1) - p^n(i,j)\} \tag{2.3.12}$$

$$p^{n+1}(i,j) = p^n(i,j) - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x}\{{v_x}^{n+0.5}(i+0.5,j) - {v_x}^{n+0.5}(i-0.5,j)\}$$

$$- \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x}\left\{{v_y}^{n+0.5}(i,j+0.5) - {v_y}^{n+0.5}(i,j-0.5)\right\} \tag{2.3.13}$$

となり、x,y方向それぞれの粒子速度更新式と音圧更新式が得られる。式(2.3.11)(2.3.12)により、任意の空間、時間ステップの粒子速度は、同じ空間ステップの 1 時間ステップ前の粒子速度と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の音圧によって求めることができる。また、同様に式(2.3.13)により、任意の空間、時間ステップの音圧は、同じ空間ステップの 1 時間ステップ前の音圧と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の粒子速度によって求めることができる。以上より、初期条件さえわかれば、全空間ステップについて音圧と粒子速度を交互に計算することで、次々と新しい時間ステップの音圧分布、及び粒子速度分布を求めることが可能となる。

(3)境界条件

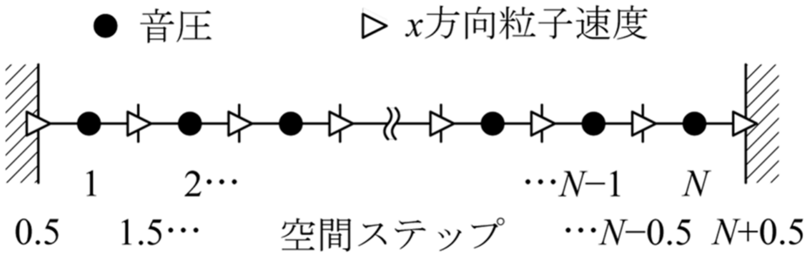

Fig. 2.3.1　一次元音場の境界条件

FDTD 法では空間を離散化して計算を行うため、解析対象空間の大きさを決めなければならない。しかし、式(2.3.11)~(2.3.13)では更新の対象とする参照点から半ステップずれた点の値が必要となるため、解析対象領域の端を計算することが不可能である。そのため、端を計算するための処理が必要となり、この処理の条件を境界条件と呼ぶ。Fig. 2.3.1 に示すような一次元音場を考える。それぞれの参照点の下には空間ステップiの値が記されている。この時、$i = 1 \sim N$の音圧と、$i = 1.5 \sim N - 0.5$の粒子速度は自身の両端に参照点があるため、式(2.3.11)やv_yの項を無視した式(2.3.13)で更新が可能である。しかし、$i = 0.5$の粒子速度は左側、$i = N + 0.5$の粒子速度は右側の音圧が定義されていないため、式(2.3.11)では更新することができない。これらを更新するために、簡単な境界条件を紹介する。考える境界は剛体との境界である。ここで、剛体とは十分に硬くて重く、全く運動しない物体のことをいう。この時、剛体に接する空気も運動しない。これらより、境界条件は、「境界上の粒子速度が常にゼロ」となる。したがって、Fig. 2.3.1 に示す両端の粒子速度はすべての時間ステップに対して、

$$v_x{}^{n+0.5}(0.5) = v_x{}^{n+0.5}(N + 0.5) = 0 \tag{2.3.14}$$

となる。

二次元の場合には、y方向についても同様に、

$$v_y{}^{n+0.5}(0.5) = v_y{}^{n+0.5}(N + 0.5) = 0 \tag{2.3.15}$$

となる。

(4)安定条件

計算を始める前に空間離散化幅と時間離散化幅を決定しなければいけないが、これらの値によっては解が発散してしまう場合がある。ここでは、解が発散しないための離散化幅の設定方法を述べる。まず、解析対象とする上限の周波数を決定する。FDTD 法では参照点によって連続的な波動を近似表現するため、波長に対して十分に細かい値を採用する必要があり、一般的には波長の 10～20 分の 1 程度の細かさが必要とされている。しかし、計算機のメモリにも上限があり、空間離散化幅を小さくするほど容量が大きく、また、計算時間

も長くなってしまうため、これらを勘案して決定する必要がある。時間離散化幅については、次の検討を行い、条件を満たすよう決定する。

$$v_x{}^{n+0.5}(i+0.5,j) = v_{x0}{}^{n+0.5} e^{i\{k_x(i+0.5)\Delta x + k_y j\Delta y\}} \quad (2.3.16)$$

$$p^n(i,j) = p_0{}^n e^{i\{k_x i\Delta x + k_y j\Delta y\}} \quad (2.3.17)$$

上記の式は平面波を表す。平面波(2.3.16)を更新式(2.3.11)に代入し、$S_x = 2\sin(k_x\Delta/2)/\Delta$としてすれば、

$$v_{x0}{}^{n+0.5} = v_{x0}{}^{n-0.5} - i\frac{\Delta t}{\rho} S_x p_0{}^n \quad (2.3.18)$$

が得られる。同様に

$$v_{y0}{}^{n+0.5} = v_{y0}{}^{n-0.5} - i\frac{\Delta t}{\rho} S_y p_0{}^n \quad (2.3.19)$$

となる。一方、平面波(2.3.17)を更新式(2.3.13)に代入すれば、

$$p_0{}^{n+1} = p_0{}^n - i\rho c^2 \Delta t\left(S_x v_{x0}{}^{n+0.5} + S_y v_{y0}{}^{n+0.5}\right) \quad (2.3.20)$$

が得られる。さらに、式(2.3.20)に式(2.3.18)、(2.3.19)を代入すれば、

$$p_0{}^{n+1} = \left\{1 - c^2\Delta t^2\left(S_x{}^2 + S_y{}^2\right)\right\} p_0{}^n - i\rho c^2\Delta t\left(S_x v_{x0}{}^{n-0.5} + S_y v_{y0}{}^{n-0.5}\right) \quad (2.3.21)$$

となり、これらを行列表記でまとめると、

$$\begin{bmatrix} v_{x0}{}^{n+0.5} \\ v_{y0}{}^{n+0.5} \\ p_0{}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i\frac{\Delta t}{\rho} S_x \\ 0 & 1 & -i\frac{\Delta t}{\rho} S_y \\ -i\rho c^2 \Delta t S_x & -i\rho c^2 \Delta t S_y & 1 - c^2\Delta t^2\left(S_x{}^2 + S_y{}^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0}{}^{n-0.5} \\ v_{y0}{}^{n-0.5} \\ p_0{}^n \end{bmatrix} \quad (2.3.22)$$

$$\leftrightarrow \mathrm{X}^{n+1} = \mathrm{AX}^n$$

と表される。この時、ベクトル X が発散しないためには行列 A のすべての固有値の絶対値が 1 以下でなければならない。これらを満足しない時間離散化幅を採用すると解が発散する。そのため、これらを安定条件と呼ぶ。

2.4　流体の WE-FDTD 法[4]

(1)支配式

　2.3 節と同じ計算条件を考えると、式(2.3.1)(2.3.2)(2.3.6)より、流体の波動方程式は、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{2.4.1}$$

で表される。

(2)更新式

　式(2.4.1)に差分近似を適用すると、更新式として

$$p^{n+1}(i,j)=2p^{n}(i,j)-p^{n-1}(i,j)+\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\{p^{n}(i+1,j)-2p^{n}(i,j)+p^{n}(i-1,j)\}+$$

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta y}\right)^2\{p^{n}(i,j+1)-2p^{n}(i,j)+p^{n}(i,j-1)\} \tag{2.4.2}$$

が得られる。これにより、任意の空間、時間ステップの音圧は一時間ステップ、二時間ステップ前の音圧を使用することで求めることが可能となる。

(3)境界条件

　境界に関しては、まず解析対象空間の外側に仮想的な音圧参照点を考え、その値と解析対象空間内の音圧の値から境界上の粒子速度を求める式を作成する。粒子速度が適切な値になるよう仮想的な音圧の値を決定することで境界条件を満足させる。

2.5　固体の S-FDTD 法[5]

(1)支配式

2.3 節と同じ計算条件を考えると、固体の運動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \tag{2.5.1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=\frac{\partial T_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \tag{2.5.2}$$

と表せる。ここで、$T_{xx,yy}$は垂直応力、$T_{xy,yx}$はせん断応力である。この固体は回転しないため、T_{xy}=T_{yx}となる。また、Hooke の法則により、

$$T_{xx}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{2.5.3}$$

$$T_{yy}=\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{2.5.4}$$

$$T_{xy}=T_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{2.5.5}$$

が成り立つ。ここで、μは第一 Lamé 定数(せん断弾性係数)、 λ を第二 Lamé 定数と呼ぶ。なお、体積弾性率κは Lamé 定数を用いて$\kappa=\lambda+\frac{2}{3}\mu$と表される。

(2)更新式

式(2.5.1)~(2.5.5)を一階の偏微分方程式とするために、粒子速度を用いた表現に変更し、また、これら式(2.5.3)~(2.5.5)の両辺を時間微分すると、

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \tag{2.5.6}$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \tag{2.5.7}$$

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial t}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{2.5.8}$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial t}=\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{2.5.9}$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{2.5.10}$$

となる。

差分近似を式(2.5.6)~(2.5.10)に適用すると、

$$v_x{}^{n+0.5}(i+0.5,j) = v_x{}^{n-0.5}(i+0.5,j) + \frac{\Delta t}{\rho}\left\{\frac{T_{xx}{}^{n}(i+1,j)-T_{xx}{}^{n}(i,j)}{\Delta x} + \frac{T_{xy}{}^{n}(i+0.5,j+0.5)-T_{xy}{}^{n}(i+0.5,j-0.5)}{\Delta y}\right\} \tag{2.5.11}$$

$$v_y{}^{n+0.5}(i+0.5,j) = v_y{}^{n-0.5}(i+0.5,j) + \frac{\Delta t}{\rho}\left\{\frac{T_{xy}{}^{n}(i+1,j)-T_{xy}{}^{n}(i,j)}{\Delta x} + \frac{T_{yy}{}^{n}(i+0.5,j+0.5)-T_{yy}{}^{n}(i+0.5,j-0.5)}{\Delta y}\right\} \tag{2.5.12}$$

$$T_{xx}{}^{n+1}(i+0.5,j+0.5) = T_{xx}{}^{n}(i+0.5,j+0.5) + \Delta t(\lambda+2\mu)\frac{v_x{}^{n+0.5}(i+1,j+0.5)-v_x{}^{n+0.5}(i,j+0.5)}{\Delta x} + \Delta t\lambda\frac{v_y{}^{n+0.5}(i+0.5,j+1)-v_y{}^{n+0.5}(i+0.5,j)}{\Delta y} \tag{2.5.13}$$

$$T_{yy}{}^{n+1}(i+0.5,j+0.5) = T_{yy}{}^{n}(i+0.5,j+0.5) + \Delta t\lambda\frac{v_x{}^{n+0.5}(i+1,j+0.5)-v_x{}^{n+0.5}(i,j+0.5)}{\Delta x} + \Delta t(\lambda+2\mu)\frac{v_y{}^{n+0.5}(i+0.5,j+1)-v_y{}^{n+0.5}(i+0.5,j)}{\Delta y} \tag{2.5.14}$$

$$T_{xy}{}^{n+1}(i+0.5,j+0.5) = T_{xy}{}^{n}(i+0.5,j+0.5) + \mu\frac{v_y{}^{n+0.5}(i+1,j+0.5)-v_y{}^{n+0.5}(i,j+0.5)}{\Delta x} + \mu\frac{v_x{}^{n+0.5}(i+0.5,j+1)-v_x{}^{n+0.5}(i+0.5,j)}{\Delta y} \tag{2.5.15}$$

となる。上記の式により、任意の空間、時間ステップの粒子速度は、同じ空間ステップの一時間ステップ前の粒子速度と隣接する空間ステップの半時間ステップ前の垂直応力とせん断応力によって求めることができる。また、任意の空間、時間ステップの垂直応力、せん断

応力は同じ空間ステップの一時間ステップ前の垂直応力と隣接する空間ステップの半時間ステップ前の粒子速度によって求めることができる。以上より流体と同じように初期条件さえわかれば、全空間ステップについて粒子速度と垂直応力、せん断応力を交互に計算することで、新しい時間ステップの粒子速度と垂直応力、せん断応力を求めることが可能となる。

(3)境界条件

粒子速度についての境界条件は式(2.3.14),(2.3.15)と同様に

$$v_x^{n+0.5}(0.5) = v_x^{n+0.5}(N+0.5) = 0 \tag{2.5.14}$$

となる。y方向についても同様に、

$$v_y^{n+0.5}(0.5) = v_y^{n+0.5}(N+0.5) = 0 \tag{2.5.15}$$

せん断応力についての境界条件は Fig. 2.3.1 の場合、

$$T_{xy}(0,1\sim j-1) = T_{xy}(0,1\sim j-1) + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(1,1\sim j-1) + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}\{v_x(0,2\sim j) - v_x(0,1\sim j-1)\} \tag{2.5.16}$$

となる。v_yが左側に存在しないが、境界上の粒子速度が 0 であることから、右のv_yの逆符号の値を左側に仮定することで得られたものである。

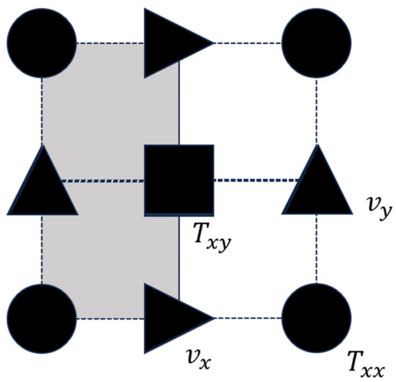

Fig. 2.3.1　境界条件（左半分が剛体）

同様にして、

$$T_{xy}(i,1\sim j-1) = T_{xy}(i,1\sim j-1) - 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(i,1\sim j-1) + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}\{v_x(i,2\sim j) - v_x(i,1\sim j-1)\} \tag{2.5.17}$$

$$T_{xy}(1\sim i-1,0) = T_{xy}(1\sim i-1,0) + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}\{v_y(2\sim i,0) - v_y(1\sim i-1,0)\} + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(1\sim i-1,1) \tag{2.5.18}$$

$$T_{xy}(1\sim i-1,j) = T_{xy}(1\sim i-1,j) + 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{v_y(2\sim i,j) - v_y(1\sim i-1,j)\right\} - 2\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(1\sim i-1,j)$$

(2.5.19)

が得られ、四辺それぞれの境界条件を求めることができる。また、空間の四隅については、同様の考え方を拡張し、

$$T_{xy}(0,0) = T_{xy}(0,0) + 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(1,0) + 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(0,1) \qquad (2.5.20)$$

$$T_{xy}(i,0) = T_{xy}(i,0) - 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(i,0) + 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(i,1) \qquad (2.5.21)$$

$$T_{xy}(0,j) = T_{xy}(0,j) + 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(1,j) - 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(0,j) \qquad (2.5.22)$$

$$T_{xy}(i,j) = T_{xy}(i,j) - 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta x}2v_y(i.j) - 4\mu\frac{\Delta t}{\Delta y}2v_x(i,j) \qquad (2.5.23)$$

で更新できる。

2.6　固体の WE-FDTD 法

(1)支配式

　2.2 節で述べた固体の波動方程式より

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = {c_L}^2 \nabla^2 \varphi \tag{2.6.1}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = {c_s}^2 \nabla^2 \Psi_x \tag{2.6.2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} = {c_s}^2 \nabla^2 \Psi_y \tag{2.6.3}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial t^2} = {c_s}^2 \nabla^2 \Psi_z \tag{2.6.4}$$

が得られた。本研究では簡単のために音場を二次元空間として考えるため、上記の方程式を二次元へ変換していく必要がある。二次元場の場合、$\frac{\partial}{\partial z} = 0, u_z = 0$となる。この時、

$$\nabla_\times \nabla_\times \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla^T \mathbf{u}) \tag{2.6.5}$$

が成り立つ。また、変位に関する波動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla^T \mathbf{u}) + \mu\{\nabla(\nabla^T \mathbf{u}) - \nabla_\times \nabla_\times \mathbf{u}\}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_x + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_y + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{2.6.6}$$

となる。2.2 節では変位ポテンシャルを考えたが、ここでは速度ポテンシャルを考える。二次元場の場合、$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \Psi_x = \Psi_y = 0$であり、速度ベクトルポテンシャルはスカラとなる。その値をΨとすれば、

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = -\nabla \Phi + \nabla_\times \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6.7}$$

が成り立つ。速度ポテンシャルに関する波動方程式は、変位ポテンシャルを考えた場合と変わらず、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = {c_L}^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) \quad \left(c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\right) \tag{2.6.8}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = {c_s}^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) \quad \left(c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \tag{2.6.9}$$

となる。

(2)更新式

式(2.6.8)、(2.6.9)に差分近似を適用すれば、

$$\Phi^{n+1}(i,j) = 2\Phi^{n}(i,j) - \Phi^{n-1}(i,j) + \frac{{c_L}^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\{\Phi^{n}(i+1,j) - 2\Phi^{n}(i,j) + \Phi^{n}(i-1,j)\} +$$

$$\frac{{c_L}^2\Delta t^2}{\Delta y^2}\{\Phi^{n}(i,j+1) - 2\Phi^{n}(i,j) + \Phi^{n}(i,j-1)\} \qquad (2.6.10)$$

$$\Psi^{n+1}(i,j) = 2\Psi^{n}(i,j) - \Psi^{n-1}(i,j) + \frac{{c_s}^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\{\Psi^{n}(i+1,j) - 2\Psi^{n}(i,j) + \Psi^{n}(i-1,j)\} +$$

$$\frac{{c_s}^2\Delta t^2}{\Delta y^2}\{\Psi^{n}(i,j+1) - 2\Psi^{n}(i,j) + \Psi^{n}(i,j-1)\} \qquad (2.6.11)$$

となる。また、式(2.6.7)より、

$$v_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad (2.6.12)$$

$$v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad (2.6.13)$$

であり、式(2.6.12)、(2.6.13)に差分近似を適用すれば、

$$v_x{}^{n}(i,j) = -\frac{\Phi^{n}(i+1,j) - \Phi^{n}(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{\Psi^{n}(i,j+1) - \Psi^{n}(i,j-1)}{2\Delta y} \qquad (2.6.14)$$

$$v_y{}^{n}(i,j) = -\frac{\Phi^{n}(i,j+1) - \Phi^{n}(i,j-1)}{2\Delta y} - \frac{\Psi^{n}(i+1,j) - \Psi^{n}(i-1,j)}{2\Delta x} \qquad (2.6.15)$$

となり、粒子速度の値が得られる。

(3)境界条件

固定境界上では、$v_x = v_y = 0$であるので、

$$v_x{}^{n}(i,j) = -\frac{\Phi^{n}(i+1,j) - \Phi^{n}(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{\Psi^{n}(i,j+1) - \Psi^{n}(i,j-1)}{2\Delta y} = 0 \qquad (2.6.15)$$

$$v_y{}^{n}(i,j) = -\frac{\Phi^{n}(i,j+1) - \Phi^{n}(i,j-1)}{2\Delta y} - \frac{\Psi^{n}(i+1,j) - \Psi^{n}(i-1,j)}{2\Delta x} = 0 \qquad (2.6.16)$$

となる。上記の式より、

$$-\Delta y\{\Phi^{n}(i+1,j) - \Phi^{n}(i-1,j)\} + \Delta x\{\Psi^{n}(i,j+1) - \Psi^{n}(i,j-1)\} = 0 \qquad (2.6.17)$$

$$-\Delta x\{\Phi^{n}(i,j+1) - \Phi^{n}(i,j-1)\} - \Delta y\{\Psi^{n}(i+1,j) - \Psi^{n}(i-1,j)\} = 0 \qquad (2.6.18)$$

が得られ、これらを適宜変形することで音場空間の各辺四辺の速度スカラ、ベクトルポテンシャルそれぞれについての境界条件を得ることができる。空間の左端については、

$$\Phi^{n}(i-1,j) = \Phi^{n}(i+1,j) - \frac{\Delta x}{\Delta y}\{\Psi^{n}(i,j+1) - \Psi^{n}(i,j-1)\} \qquad (2.6.19)$$

$$\Psi^n(i-1,j) = \Psi^n(i+1,j) + \frac{\Delta x}{\Delta y}\{\Phi^n(i,j+1) - \Phi^n(i,j-1)\} \tag{2.6.20}$$

となる。右端については、

$$\Phi^n(i+1,j) = \Phi^n(i-1,j) + \frac{\Delta x}{\Delta y}\{\Psi^n(i,j+1) - \Psi^n(i,j-1)\} \tag{2.6.21}$$

$$\Psi^n(i+1,j) = \Psi^n(i-1,j) - \frac{\Delta x}{\Delta y}\{\Phi^n(i,j+1) - \Phi^n(i,j-1)\} \tag{2.6.22}$$

となる。上端については、

$$\Phi^n(i,j-1) = \Phi^n(i,j+1) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\{\Psi^n(i+1,j) - \Psi^n(i-1,j)\} \tag{2.6.23}$$

$$\Psi^n(i,j-1) = \Psi^n(i,j+1) - \frac{\Delta y}{\Delta x}\{\Phi^n(i+1,j) - \Phi^n(i-1,j)\} \tag{2.6.24}$$

となる。下端については、

$$\Phi^n(i,j+1) = \Phi^n(i,j-1) - \frac{\Delta y}{\Delta x}\{\Psi^n(i+1,j) - \Psi^n(i-1,j)\} \tag{2.6.25}$$

$$\Psi^n(i,j+1) = \Psi^n(i,j-1) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\{\Phi^n(i+1,j) - \Phi^n(i-1,j)\} \tag{2.6.26}$$

となる。

3　研究結果

3.1　研究対象

本研究の目的である固体の WE-FDTD 法の精度確認のために、固体の S-FDTD 法のプログラムと固体の WE-FDTD 法のプログラムの結果を比較する。プログラムの作成にあたり、加振位置、受振位置や定数の各数値を Table 3.1.1 に示す。

Table 3.1.1　計算に用いた各数値

固体密度	2400	[kg/m^3]
ヤング率	2.4×10^{10}	[Pa]
ポアソン比	0.2	[-]
第一 Lamé 定数	1.0×10^{10}	[Pa]
第二 Lamé 定数	6.67×10^6	[Pa]
X 方向の空間最大値	40	[m]
Y 方向の空間最大値	40	[m]
X 方向の空間離散化幅	0.5	[m]
Y 方向の空間離散化幅	0.5	[m]
X 方向の空間ステップ数	80	[個]
Y 方向の空間ステップ数	80	[個]
計算最大時間	0.03	[s]
時間離散化幅	0.000106	[s]
時間ステップ数	283	[個]
X 方向の加振位置	20	[m]
Y 方向の加振位置	40	[m]
加振波形振幅	1.0	[Pa]
加振波形急峻さ	7.0×10^6	[m/s]
加振波形ピーク時刻	0.0015	[s]
X 方向の受振位置	30	[m]
Y 方向の受振位置	30	[m]

3.2　プログラムの比較

　Table 3.1.1 に示した値を使用し、上端境界上の 1 点に下方向にガウシアンパルス加振を与えたときの結果を示す。固体の S-FDTD 法、WE-FDTD 法それぞれについて、受音点での x、y 軸方向の粒子速度の時間変化のグラフを作成した。

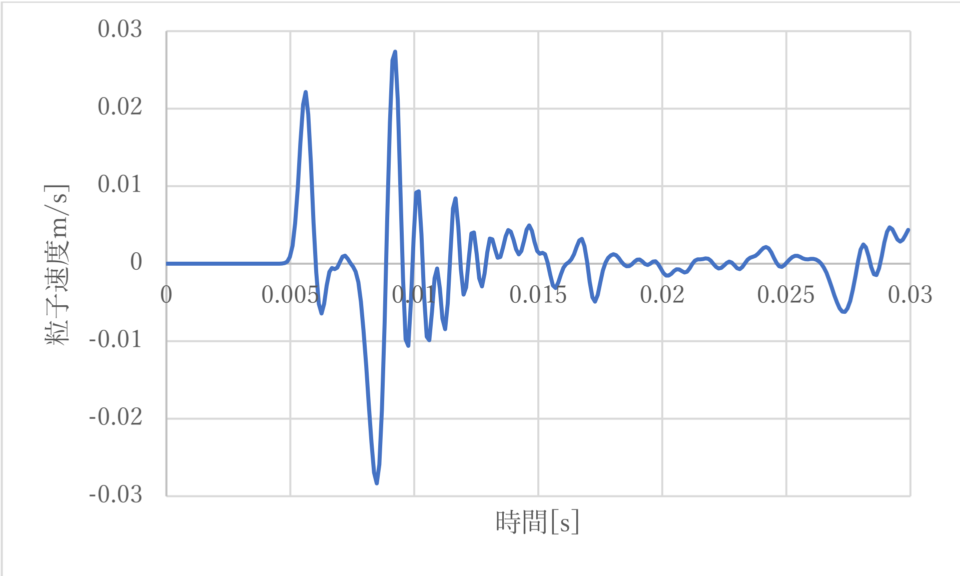

Fig. 3.2.1　S-FDTD 法を使用した受音点の x 軸方向の粒子速度の時間変化

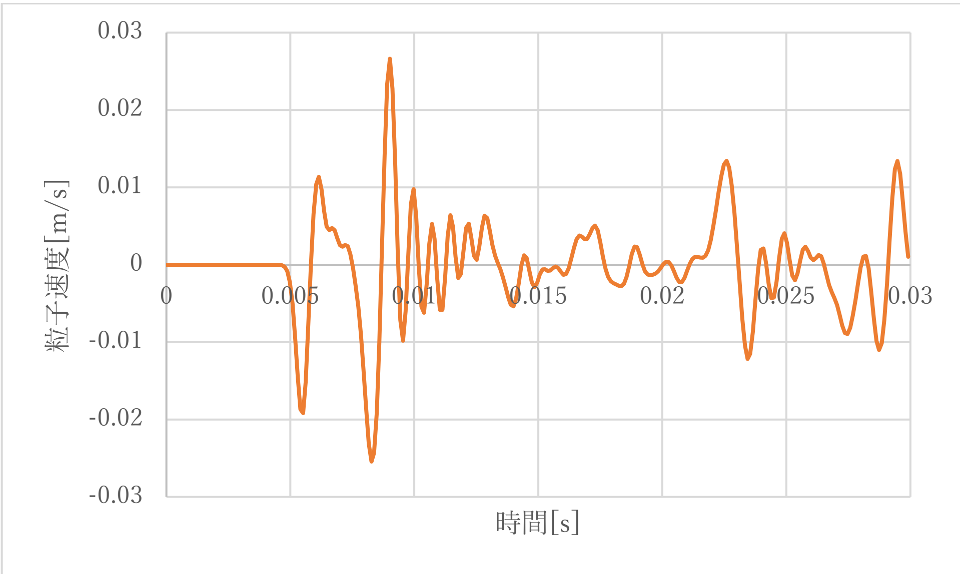

Fig. 3.2.2　S-FDTD 法を使用した受音点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

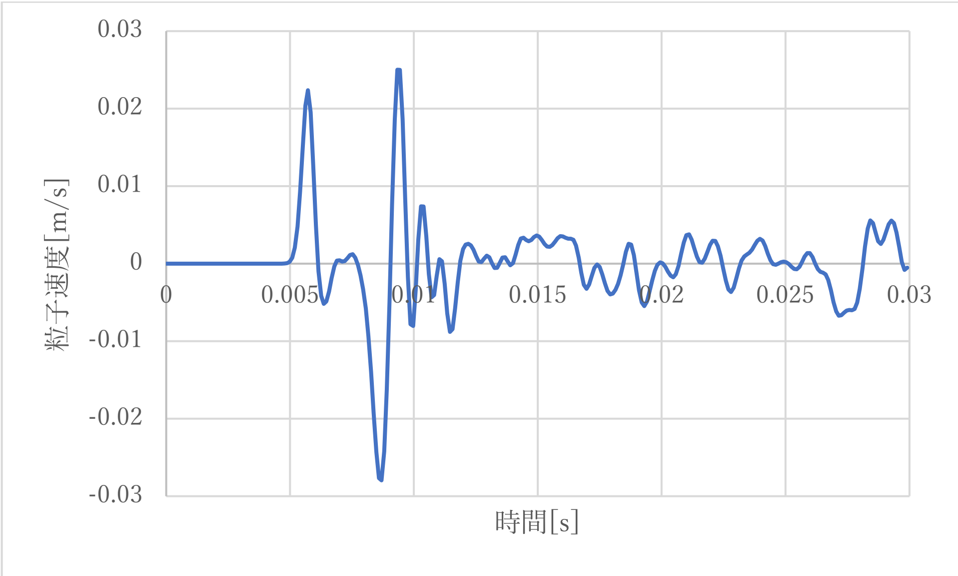

Fig. 3.2.3　WE-FDTD 法を使用した受音点の x 軸方向の粒子速度の時間変化

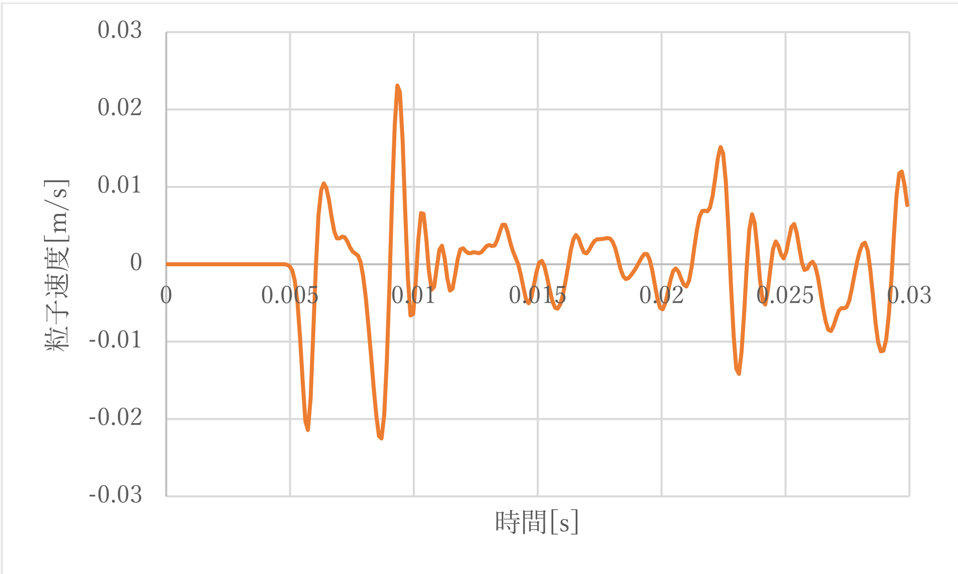

Fig. 3.2.4　WE-FDTD 法を使用した受音点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

Fig. 3.2.5、Fig. 3.2.6 に示すグラフは Fig. 3.2.1~3.2.4 の結果を x 軸 y 軸それぞれについて重ね合わせて比較したものである。

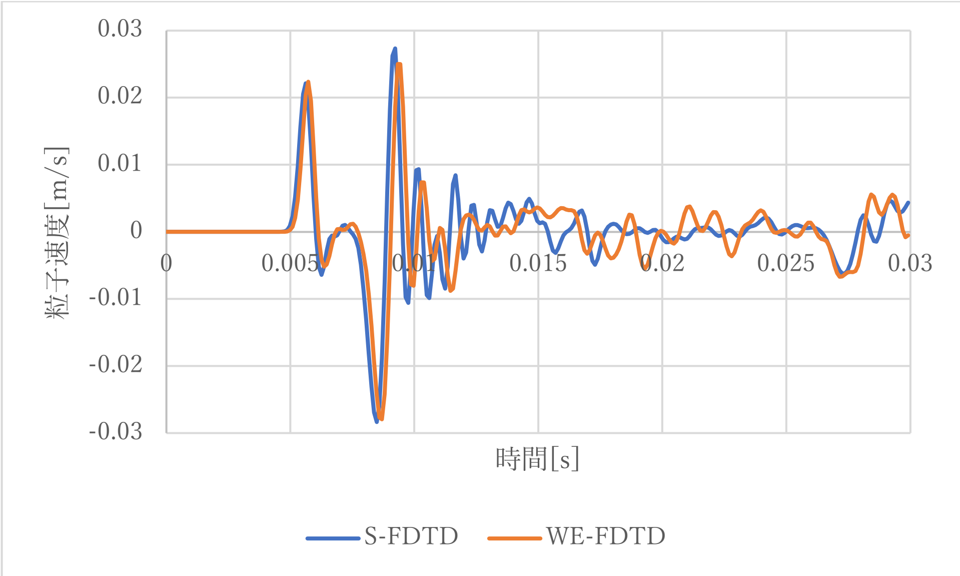

Fig. 3.2.5　x 軸方向の粒子速度の時間変化

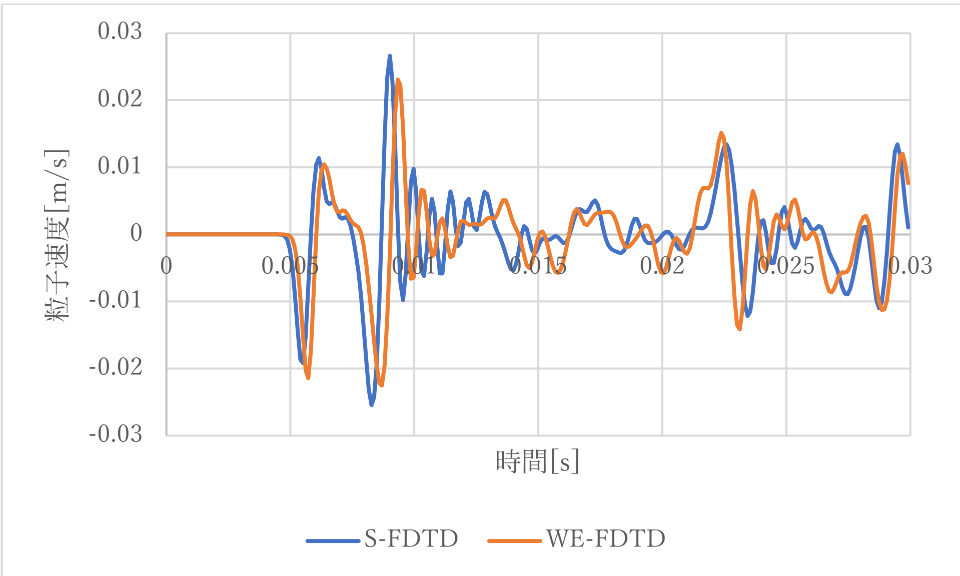

Fig. 3.2.6　y 軸方向の粒子速度の時間変化

4　結論・考察

Fig. 3.2.5、Fig. 3.2.6 より粒子速度の時間変化はほぼ一致しているが、時間が経過するにつれ、誤差が生じることが分かった。その原因を明らかにするため、励振を与えた際の粒子速度ベクトルを可視した。S-FDTD 法の結果を Fig. 4.1、WE-FDTD 法の結果を Fig. 4.2 に示す。

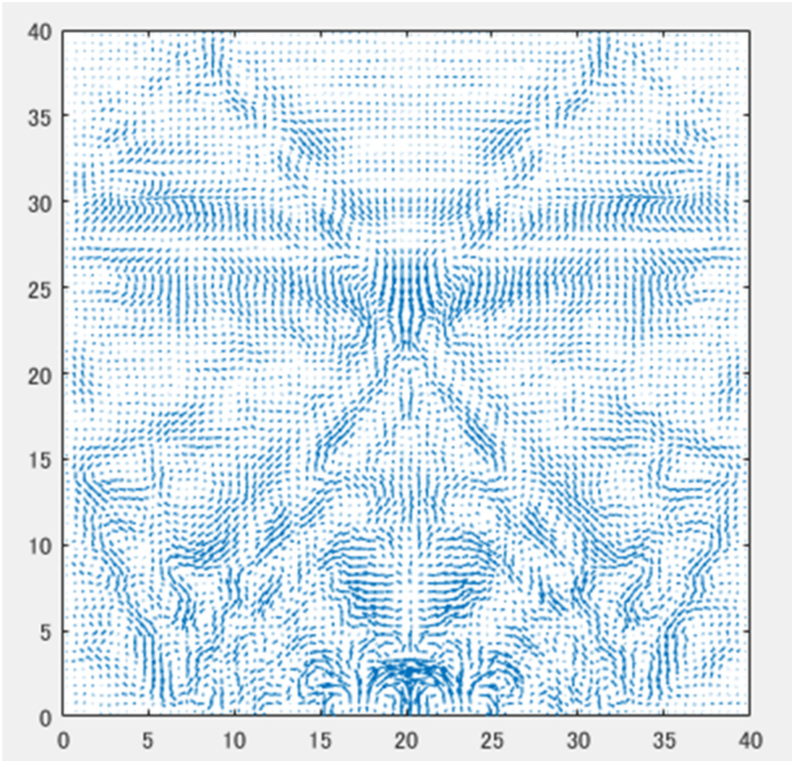

Fig. 4.1　S-FDTD 法の波形

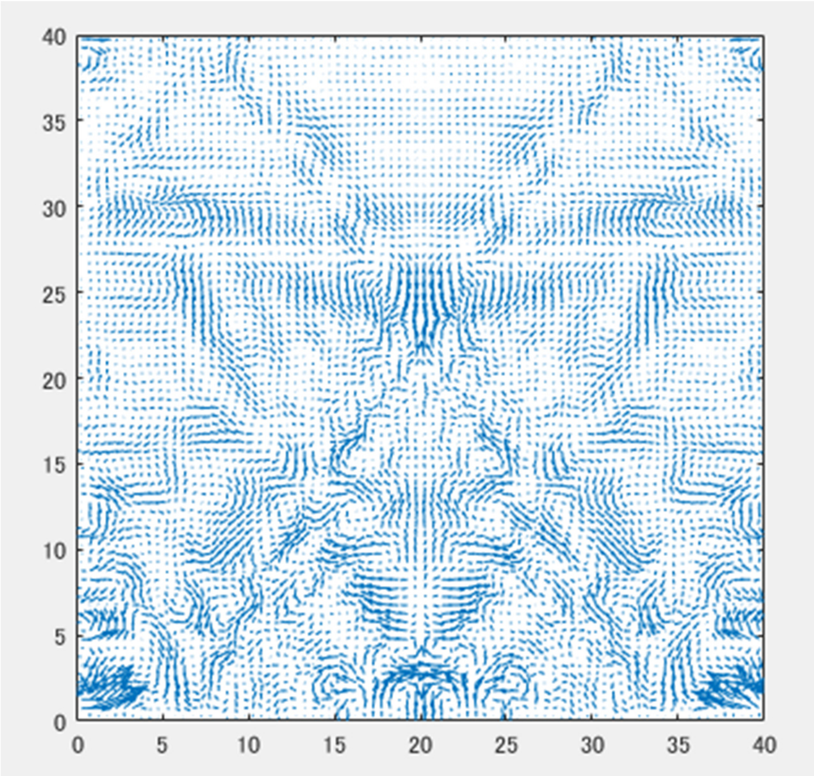

Fig. 4.2　WE-FDTD 法の波形

これらを比較すると、空間の内部では粒子速度ベクトルはほぼ一致するが、空間の隅で少し違いが見られる。例えば、Fig. 4.2 の下側の左右両隅では比較的大きなベクトルが観測されるが、Fig. 4.1 では観測されない。

上記のように、WE-FDTD 法の大まかな理論体系を構築することには成功したと考えられるが、まだ計算精度は高くなく、誤差が生じてしまうことが分かった。考えられる原因としては、空間の境界となる四辺に違いが生まれているため、境界条件に何かしらの問題があるものと思われる。今後の課題として、これらの誤差を修正するとともに、安定条件を定め、固体の WE-FDTD 法を確立していくことである。また、最終的には 1.3 節で述べた CE-FDTD 法を固体に適用することが挙げられる。

参考文献

[1] 豊田政弘, “時間領域有限差分法を用いた凡用的な連成解析手法の開発”, 音響学会誌 72(11), 697-702, 2016.

[2] K. S. Yee, “Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell’s Equations in Isotropic Media”, IEEE Trans. Antennas Propag., IEEE Trans. AP-148, 302-307,1966.

[3] 豊田政弘, “建築音響物理学”, 関西大学出版部, 225-231, 2023.

[4] Yutaka Miyazaki, Takao Tsuchiya, “Perfectly Matched Layer for the Wave Equation Finite Difference Time Domain Method”, Japanese Journal of Applied Physics 51, 07GB02-1-07GB02-5, 2012.

[5] Masahiro Toyoda, Daiji Takahashi, Yasuhito Kawai, “Averaged material parameters and boundary conditions for the vibroacoustic finite-difference time-domain method with a nonuniform mesh”, Acoust. Sci. & Tech. 33, 273-276, 2012.