

固体伝搬音の高速解析手法の開発

関西大学 環境都市工学部 建築学科

建築環境工学第 I 研究室

建 20 - 73 福井 雄太

指導教員 豊田 政弘

目次

1. 序論	2
1.1. 研究背景	2
1.2. 既往研究	2
1.3. 研究目的	2
2. 研究手法	3
2.1. FDTD 法の概要	3
2.2. S-FDTD 法	3
2.3. 45° 回転座標系による FDTD 法	7
2.4. CE-FDTD 法	9
2.5. 固体の S-FDTD 法	10
3. 研究対象	15
3.1. 固体の 45° 回転座標系による FDTD 法	15
3.2. 固体の CE-FDTD 法	20
4. 結果	21
5. 結論	24
参考文献	27

1 序論

1.1 研究背景

建築空間を対象とした音場解析の手法に波動音響理論がある。波動音響理論とは音場を記述する波動方程式を基礎とした式を解くことにより音場を解析する手法であり、音の波動性が考慮された波動方程式に基づき計算を行う。そのため、精度の高い計算が可能であるが、特に高音域では計算量が膨大になり計算を終えるまでに相当な時間が必要になる。

空気伝搬音の場合、波動音響理論に基づく様々な手法で計算することができる。一方で、固体伝搬音の場合は、計算方法の選択肢が少なく、また、計算時間もかかる。建築の分野では、固体伝搬音の解析を高速にすることで、床の衝撃音や壁を介す遮音問題の解決に役立つと考えたため、本研究を行うこととした。

1.2 既往研究

FDTD (Finite-Difference Time-Domain) 法 [1]は、支配方程式の直接差分による離散化のため理解しやすく、またプログラミングも容易なため、音響分野でも広く利用されている。その中でも、土屋ら[2]は粒子速度を用いた CE-FDTD 法を提案し、音圧更新の際に座標軸方向だけでなく、対角線方向にも定義した粒子速度を参照することで高精度化できることを示した。

1.3 研究目的

固体伝搬音の高速解析手法として Standard FDTD (S-FDTD) 法[3]という方法があるが、予測精度を高くするには計算時間が大幅に増えるという課題がある。本研究では、流体の Compact Explicit FDTD (CE-FDTD) 法の考え方を応用し、固体に対応した CE-FDTD 法を開発することで、予測精度を高く、また、計算時間を短くすることを目的とする。

2 研究手法

2.1 FDTD法の概要

FDTD法 [1]は、Yee[2]によって開発された数値解析手法の一つである。有限差分法とは音場を空間的、時間的に離散化し、支配式となる微分方程式の微分係数を差分商で近似する解析手法の総称である。Fig. 2.1に示すように、空間的に離散化された一つのセルには音圧と粒子速度を互い違いに配置する。この格子を Yee セルと呼ぶ。x、y、z 軸の3次元空間で考える事もできるが、本研究では簡単のために x、y 軸の2次元空間で考える。また、Fig. 2.1 はスタガードグリッドと呼ばれる互い違いの格子を示しており、このグリッド上に離散的に定義された物理量を時間が発展するように交互に計算する。これをリープフロッグアルゴリズムと呼ぶ。直交座標で考える場合、SLF 法 (Standard leapfrog) と呼ばれ、これを使用する FDTD 法は S-FDTD 法と呼ばれる。

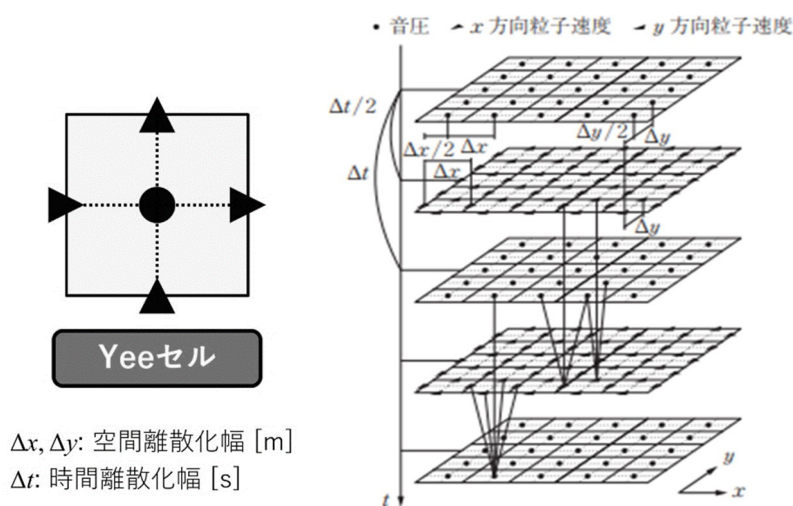


Fig. 2.1 Yee Cell と Staggered grid

2.2 S-FDTD法

(1) 支配式

x, y の直交座標空間に寸法が $\Delta x, \Delta y$ [m]で密度が ρ [kg/m³]の空気粒子があり、各面に音圧 p [N/m²]が加わっている状態を考える。また、この空気粒子の x, y 方向の変位をそれぞれ u_x, u_y [m]とする。このとき、 $\Delta x, \Delta y$ が微小量であることを考慮すれば、 x, y 方向の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

となる。また、連続方程式は密度 ρ [kg/m³]、音速 c [m/s]を用いて

$$p = -\rho c^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

と表される。

(2) 更新式

FDTD 法では式(2.1)、(2.2)、(2.3)を支配式として音波の解析を行う。まず、これらの式を一階の偏微分方程式とするために、式(2.3)の両辺を時間微分し、変位の時間微分を粒子速度に置き換える。 x, y 方向の粒子速度をそれぞれ v_x, v_y [m/s]とすれば、解くべき支配式は、

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

となる。

音圧や粒子速度は空間や時間に関して連続的に変化するが、計算機では残念ながら連続な関数を扱うことが不可能である。そこで、空間や時間のある単位で区切り、その区切りごとの離散的な値を用いることで連続的な関数を近似する。このように、空間や時間を単位で区切ることを離散化と呼び、空間に関する区切り幅を空間離散化幅、時間に関する幅を時間離散化幅、区切りごとの離散的な値を定めた点を参照点と呼ぶ。Fig. 2.1のように音圧と空気粒子を空間離散化幅の半ステップごとに互い違いに配置する。ここで、空間ステップを i, j 、時間ステップを n とし、この時の音圧の値を $p(i, j)$ [N/m²]、空間ステップが $i + 0.5, j$ 、時間ステップが $n + 0.5$ であるときの x 方向の粒子速度を $v_x(i + 0.5, j)$ [m/s]などと表記する。上記支配式を、

$$f'(x) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} \quad (2.7)$$

という差分商を用いて近似する。この差分近似の方法を中心差分スキームと呼ぶ。これを式(2.4)~(2.6)に適用すれば、x,y 方向それぞれの粒子速度更新式が得られ、

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \quad (2.8)$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)\} \quad (2.9)$$

となる。さらに音圧更新式も

$$p^{n+1}(i, j) = p^n(i, j) - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \\ - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \quad (2.10)$$

となる。上記の式により、任意の空間、時間ステップの粒子速度は、同じ空間ステップの1時間ステップ前の粒子速度と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の音圧によって求めることができる。また、同様に式(2.10)により、任意の空間、時間ステップの音圧は、同じ空間ステップの1時間ステップ前の音圧と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の粒子速度によって求めることができる。以上より、初期条件さえわかれば、全空間ステップについて音圧と粒子速度を交互に計算することで、次々と新しい時間ステップの音圧分布、及び粒子速度分布を求めることが可能となる。

(3) 境界条件

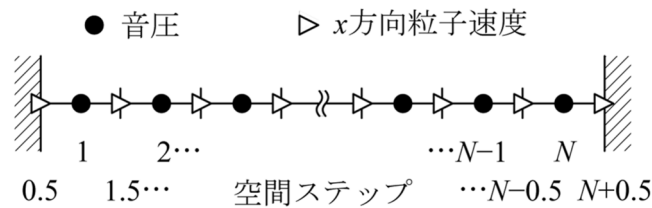


Fig. 2.2 一次元の境界条件

FDTD 法では空間を離散化して計算を行うため解析対象空間の大きさを決めなければいけない。しかし、式(2.8)~(2.10)では更新の対象とする参照点から半ステップずれた点の値が必要となるため、解析対象領域の端を計算することが不可能である。そのため、端を計算するための処理が必要となり、この処理の条件を境界条件と呼ぶ。Fig. 2.2 に

示すような 1 次元音場を考える。それぞれの参照点の下には空間ステップ i の値が記されている。このとき、 $i = 1 \sim N$ の音圧と、 $i = 1.5 \sim N - 0.5$ の粒子速度は自身の両端に参照点があるため式(2.8)や v_x の項を無視した式(2.10)で更新が可能である。しかし、 $i = 0.5$ の粒子速度は左側、 $i = N + 0.5$ の粒子速度は右側の音圧が定義されていないため、式(2.8)では更新できない。これらを更新するために、簡単な境界条件を紹介する。剛体との境界を考える。ここで、剛体は十分に硬くて重く、全く運動しない物体を指す。このとき、剛体に接する空気も運動しない。これより、境界条件は、「境界上の粒子速度がつねにゼロ」となる。したがって、Fig. 2.2 に示す両端の粒子速度は全ての時間ステップに対して、

$$v_x^{n+0.5}(0.5) = v_x^{n+0.5}(N + 0.5) = 0 \quad (2.11)$$

とすればよい。y 方向も同様である

(4) 安定条件

計算を始める前に空間離散化幅と時間離散化幅を決定しなければならないが、これらの値によっては解が発散してしまう場合がある。ここでは、解が発散しないための離散化幅の設定方法を述べる。まず、解析対象とする上限の周波数を決定する。FDTD 法では参照点によって連続的な波動を近似表現するため、波長に対して十分に細かい値を採る必要があり、一般的には波長の 10~20 分の 1 程度の細かさが必要とされている。しかし、計算機のメモリにも上限があり、空間離散化幅を小さくするほど容量が大きく、また、計算時間も長くなってしまうため、これらを勘案して決定する必要がある。

$$v_x^{n+0.5}(i + 0.5, j) = v_{x0}^{n+0.5} e^{i\{k_x(i+0.5)\Delta x + k_y j \Delta y\}} \quad (2.12)$$

$$p^n(i, j) = p_0^n e^{i\{k_x i \Delta x + k_y j \Delta y\}} \quad (2.13)$$

平面波(2.12)を更新式(2.8)に代入し、 $S_x = 2\sin(k_x \Delta/2)/\Delta$ として

$$v_{x0}^{n+0.5} = v_{x0}^{n-0.5} - i \frac{\Delta t}{\rho} S_x p_0^n \quad (2.14)$$

が得られる。同様に

$$v_{y0}^{n+0.5} = v_{y0}^{n-0.5} - i \frac{\Delta t}{\rho} S_y p_0^n \quad (2.15)$$

平面波(2.13)を更新式(2.10)に代入

$$p_0^{n+1} = p_0^n - i\rho c^2 \Delta t (S_x v_{x0}^{n+0.5} + S_y v_{y0}^{n+0.5}) \quad (2.16)$$

さらに、(2.16)に(2.14),(2.15)を代入

$$p_0^{n+1} = \{1 - c^2 \Delta t^2 (S_x^2 + S_y^2)\} p_0^n - i\rho c^2 \Delta t (S_x v_{x0}^{n-0.5} + S_y v_{y0}^{n-0.5}) \quad (2.17)$$

が得られる。まとめると

$$\begin{bmatrix} v_{x0}^{n+0.5} \\ v_{y0}^{n+0.5} \\ p_0^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i\frac{\Delta t}{\rho} S_x \\ 0 & 1 & -i\frac{\Delta t}{\rho} S_y \\ -i\rho c^2 \Delta t S_x & -i\rho c^2 \Delta t S_y & 1 - c^2 \Delta t^2 (S_x^2 + S_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0}^{n-0.5} \\ v_{y0}^{n-0.5} \\ p_0^n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\leftrightarrow X^{n+1} = AX^n$$

X が発散しないためには A のすべての固有値の絶対値が 1 以下でなければならない。これらを満足しない時間離散化幅を採用すると解が発散する。そのため、これらを安定条件と呼ぶ

2.3 45° 回転座標系による FDTD 法

CE-FDTD 法は 45° 回転させた FDTD 法と S-FDTD 法を組み合わせた考えなので、まずここでは 45° 回転座標系による FDTD 法について説明する。Fig. 2.3 のように座標軸を 45° 回転した k - l 座標系について考える。

(1) 支配式

k, l 方向は元の座標系の対角線方向に対応する。 k - l 座標系に関する支配式は、 k, l 方向の粒子速度をそれぞれ v_k, v_l [m/s] とすれば次式で表される。

$$\rho \frac{\partial v_k}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial k} \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{\partial v_l}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial l} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_k}{\partial k} + \frac{\partial v_l}{\partial l} \right) \quad (2.21)$$

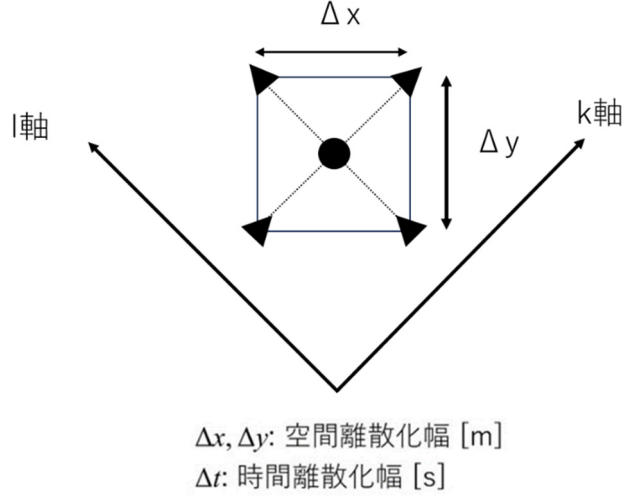


Fig. 2.3 45° 回転座標 Staggered grid

(2) 更新式

(2.4)~(2.6)と同じように計算することでk,l方向それぞれの粒子速度更新式を導き出せる。簡単に考えるため $\Delta x = \Delta y \equiv \Delta$ とすれば、

$$v_k^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) = v_k^{n-0.5}(i+0.5, j+0.5) - \frac{\Delta t}{\sqrt{2}\rho\Delta} \{p^n(i+1, j+1) - p^n(i, j)\} \quad (2.22)$$

$$v_l^{n+0.5}(i-0.5, j+0.5) = v_l^{n-0.5}(i-0.5, j+0.5) - \frac{\Delta t}{\sqrt{2}\rho\Delta} \{p^n(i-1, j+1) - p^n(i, j)\} \quad (2.23)$$

となる。さらに音圧更新式は

$$p^{n+1}(i, j) = p^n(i, j) - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{v_k^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) - v_k^{n+0.5}(i-0.5, j-0.5)\} - \frac{\rho c^2 \Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{v_l^{n+0.5}(i-0.5, j+0.5) - v_l^{n+0.5}(i+0.5, j-0.5)\} \quad (2.24)$$

となる。上記の式より、初期条件さえわかれば、全空間ステップについて音圧と粒子速度を交互に計算することで、次々と新しい時間ステップの音圧分布、及び粒子速度分布を求めることが可能となる。これを RLF (Rotated Leapfrog) 法と呼ぶ。

(3) 境界条件

(2.11)と同様に

$$v_k^{n+0.5}(0.5) = v_k^{n+0.5}(N + 0.5) = 0 \quad (2.25)$$

とし、l 方向も同様である。

2.4 CE-FDTD 法

(1) 支配式

支配式は式(2.1)~(2.3),(2.19)~(2.21)である。

(2) 更新式

CE-FDTD 法は、SLF 法と RLF 法を適当な割合で組み合わせたものであり、グリッドは Fig. 2.4 で示すような配置とする。粒子速度更新式は式(2.7),(2.10),(2.22),(2.23)のままである。音圧更新式が

$$p^{n+1}(i,j) = p^n(i,j) - (1 - 2a) \frac{\rho c^2 \Delta t}{\Delta x} \left[\begin{aligned} &\{v_x^{n+0.5}(i + 0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i - 0.5, j)\} \\ &+ \{v_y^{n+0.5}(i, j + 0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j - 0.5)\} \end{aligned} \right] \\ - \frac{2a\rho c^2 \Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \left[\begin{aligned} &\{v_k^{n+0.5}(i + 0.5, j + 0.5) - v_k^{n+0.5}(i - 0.5, j - 0.5)\} \\ &+ \{v_l^{n+0.5}(i - 0.5, j + 0.5) - v_l^{n+0.5}(i + 0.5, j - 0.5)\} \end{aligned} \right] \quad (2.26)$$

と表される。ここで a はパラメーターで範囲は $0 \leq a \leq 1/2$ である。SLF は a=0 の場合に、RLF は a=1/2 の場合に対応する。CE-FDTD 法では a=1/4 がよく使われる。

(3) 境界条件

境界条件は変わらず、式(2.11),(2.25)であり、y, l 方向も同様に考える。

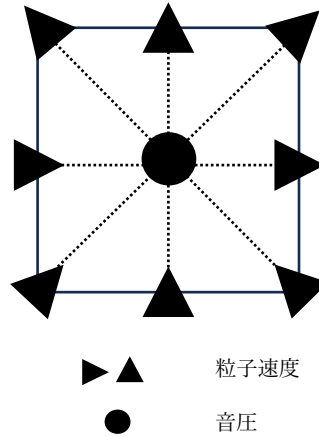


Fig. 2.4 CE-FDTD 法の Staggered grid

2.5 固体の S-FDTD 法

固体の S-FDTD 法は流体の S-FDTD 法と違い、運動方程式と Hooke の法則を解く。また、流体を伝う縦波をスカラーで考えるのに対し、固体を伝う波のうち、縦波はスカラー、横波はベクトルで考える。グリッドは Fig. 2.5 のように配置する。

(1) 支配式

前提として微小変形、断熱変化を仮定し、さらに簡単にするため等方性を仮定するとき、固体の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (2.27)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \quad (2.28)$$

である。ここで、 $T_{xx,yy}$ は垂直応力、 T_{xy} はせん断応力である。また Hooke の法則によれば

$$T_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.29)$$

$$T_{yy} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.31)$$

が成り立つ。ここで μ は Lamé の第 1 定数 (=せん断弾性係数)、 λ は Lamé の第 2 定数である。なお、体積弾性率 ρc^2 は $\rho c^2 = \lambda + (2/3)\mu$ と表される。

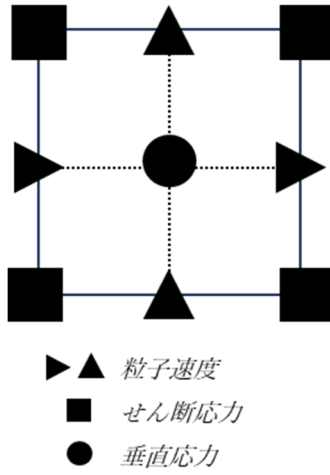


Fig. 2.5 固体の S-FDTD 法の Staggered grid

(2) 更新式

更新式は、

$$\begin{aligned}
 v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) &= v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\rho \Delta} \left\{ \begin{aligned} &T_{xx}^n(i+1, j) - T_{xx}^n(i, j) \\ &+ T_{xy}^n(i+0.5, j+0.5) - T_{xy}^n(i+0.5, j-0.5) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) &= v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\rho \Delta} \left\{ \begin{aligned} &T_{yy}^n(i, j+1) - T_{yy}^n(i, j) \\ &+ T_{xy}^n(i+0.5, j+0.5) - T_{xy}^n(i-0.5, j+0.5) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{xx}^{n+1}(i, j) &= T_{xx}^n(i, j) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \\
 &+ \lambda \frac{\Delta t}{\Delta} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{yy}^{n+1}(i, j) &= T_{yy}^n(i, j) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \\
 &+ \lambda \frac{\Delta t}{\Delta} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{xy}^{n+1}(i+0.5, j+0.5) &= T_{xy}^n(i+0.5, j+0.5) \\
&+ \mu \frac{\Delta t}{\Delta} \left[\{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j+1) - v_x^{n+0.5}(i+0.5, j)\} \right. \\
&+ \left. \{v_y^{n+0.5}(i+1, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j+0.5)\} \right] \quad (2.36)
\end{aligned}$$

となる。

(2) 境界条件

粒子速度については式(2.11)の考え方と同様である。グリッドの配置の仕方により、 T_{xy} も境界条件を考える必要がある。例えば Fig. 2.6 の $T_{xy}(0,1)$ について考える。 $v_x(0,0.5) = v_x(0,1.5) = 0$ となり $v_y(-0.5,1) = -v_y(0.5,1)$ (2.35) を使い更新できる。ただし、 $T_{xy}(0,1)$ の更新の際の弾性係数 μ は2倍せねばならない。

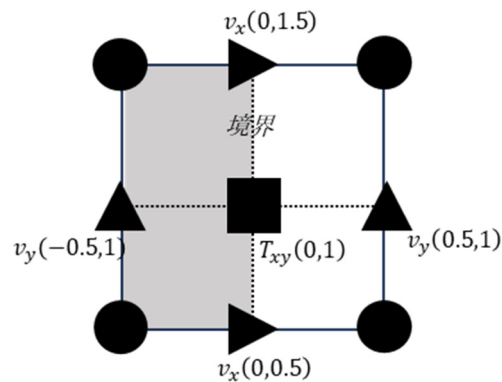


Fig. 2.6 境界条件

3 研究対象

固体の CE-FDTD 法プログラムを作成するにあたり、流体のように SLF 法と RLF 法を組み合わせるため、まずは固体の RLF 法を考える。RLF 法を考える際の目標として、既存の固体の S-FDTD のプログラムを作成し、比較対象とすることにした。固体の材料を鉄とし、音源位置にガウシアンパルスを印可する。音源位置、受音点位置は Fig. 3.1 のように置き、それぞれ値を Fig. 3.2 のように設定した。

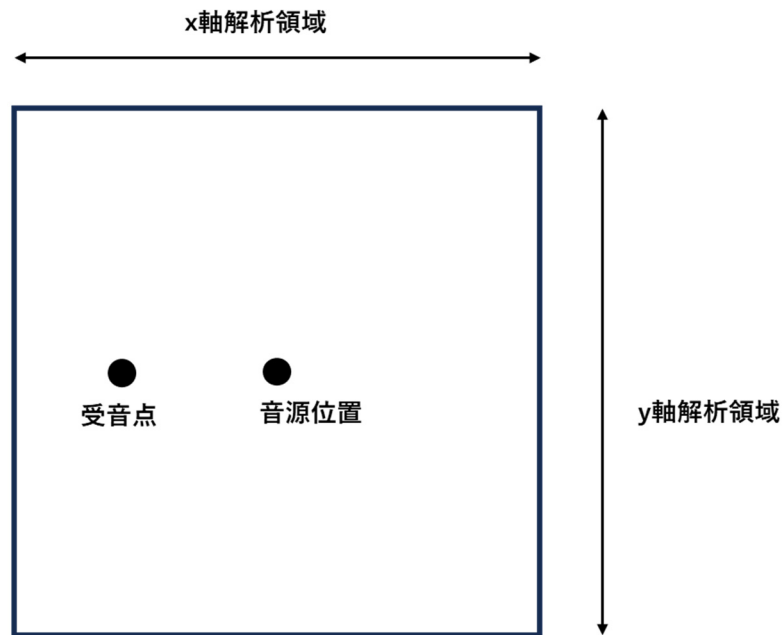


Fig. 3.1 実験対象の空間

```

xmax = 1.000d0      ! x軸解析領域 [m]↓
ymax = 1.000d0      ! y軸解析領域 [m]↓
tmax = 5.000d-3      ! 解析時間 [s]↓
dh = 2.000d-3        ! 空間離散化幅 [m]↓
dt = 2.388240645d-7 ! 時間離散化幅 [s]↓
c0 = 3.400d2         ! 空気の音速 [m/s]↓
row0 = 7.870d3        ! 密度 [kg/m^3]↓
xsc = 0.500d0        ! x軸音源位置 [m]↓
ysc = 0.500d0        ! y軸音源位置 [m]↓
xrv = 0.200d0        ! x軸受音点位置 [m]↓
yrv = 0.500d0        ! y軸受音点位置 [m]↓
e = 2.05d11          ! ヤング率 [Pa]↓
nu = 0.3d0           ! ポアソン比 [-]↓
m = 1.000d0          ! ガウシアンパルス最大値 [m^3/s]↓
a = 2.000d9          ! ガウシアンパルス係数 [-]↓
t0 = 1.000d-4        ! ガウシアンパルス中心時間 [s]↓

```

Fig. 3.2 計算に用いた各数値

上記の値を使い、受音点の y 軸方向の粒子速度の時間変化のグラフ Fig. 3.3 を作成した。RLF 法を考えるとときに粒子速度の変化が Fig. 3.3 と一致することを目指した。

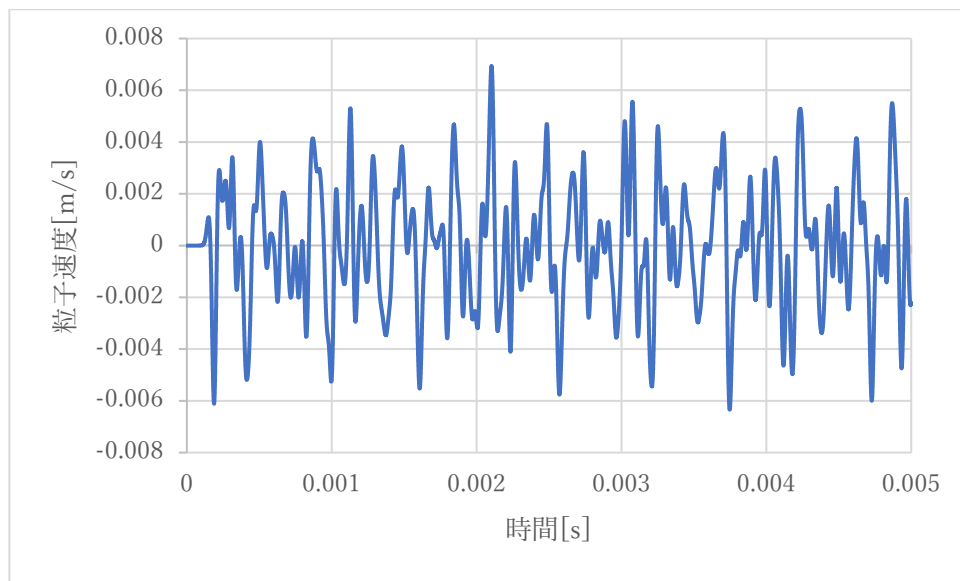


Fig. 3.3 受音点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

3.1 固体の 45° 回転座標系による FDTD 法

まず、グリッドにどのように参照点を配置するのかを考えた。

(1) 更新式

Fig. 3.4 のように置こうとすると剪断応力の更新が難しいため、せん断応力の参照点を Fig. 3.5 のように垂直応力と同じところにする事で更新式を流体と同じように立てることができた。

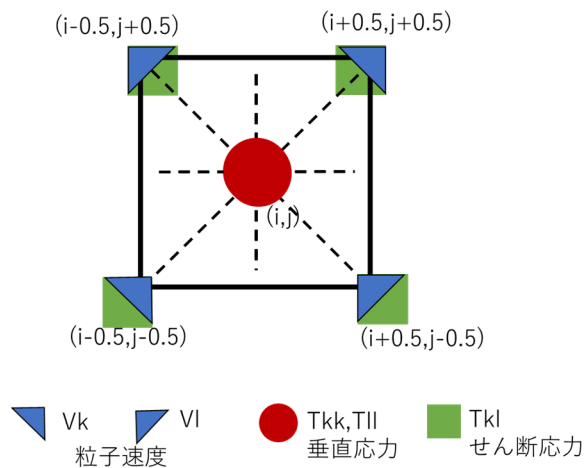


Fig.3.4 グリッド案①

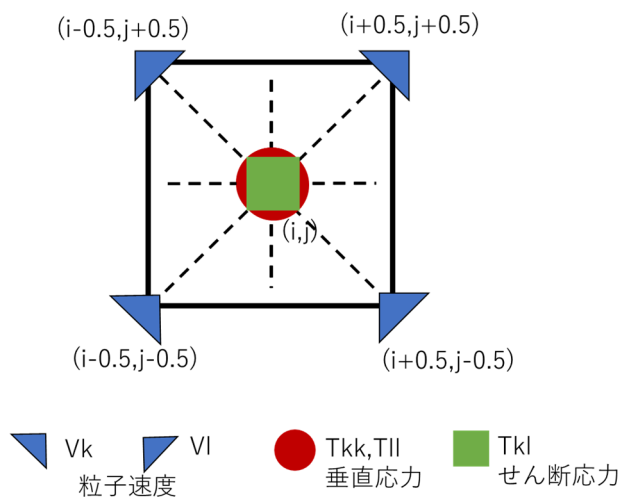


Fig.3.5 グリッド案②

k, l 方向の粒子速度更新式は

$$V_k^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) = V_k^{n-0.5}(i+0.5, j+0.5)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\sqrt{2}\rho\Delta} \{T_{kk}^n(i+1, j+1) - T_{kk}^n(i, j) + T_{kl}^n(i, j+1) - T_{kl}^n(i+1, j)\} \quad (3.1)$$

$$V_l^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) = V_l^{n-0.5}(i+0.5, j+0.5)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\sqrt{2}\rho\Delta} \{T_{ll}^n(i, j+1) - T_{kk}^n(i+1, j) + T_{kl}^n(i+1, j+1) - T_{kl}^n(i, j)\} \quad (3.2)$$

となり、k, l方向の垂直応力更新式は

$$\begin{aligned} T_{kk}^{n+1}(i, j) &= T_{kk}^n(i, j) \\ &+ \frac{(\lambda + 2\mu)\Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{V_k^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) - V_k^{n+0.5}(i-0.5, j-0.5)\} \\ &+ \frac{\lambda\Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{V_l^{n+0.5}(i-0.5, j+0.5) - V_l^{n+0.5}(i+0.5, j-0.5)\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$T_{ll}^{n+1}(i, j) = T_{ll}^n(i, j)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\lambda\Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{V_k^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5) - V_k^{n+0.5}(i-0.5, j-0.5)\} \\ &+ \frac{(\lambda+2\mu)\Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \{V_l^{n+0.5}(i-0.5, j+0.5) - V_l^{n+0.5}(i+0.5, j-0.5)\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

となった。一方、せん断応力の更新式は

$$T_{kl}^{n+1}(i, j) = T_{kl}^n(i, j) + \frac{\mu\Delta t}{\sqrt{2}\Delta} \left\{ \begin{aligned} &V_k^{n+0.5}(i - 0.5, j + 0.5) - V_k^{n+0.5}(i + 0.5, j - 0.5) \\ &+ V_l^{n+0.5}(i + 0.5, j + 0.5) - V_l^{n+0.5}(i - 0.5, j - 0.5) \end{aligned} \right\}$$

(3.5)

とし、Fig. 3.1、Fig. 3.2と同じ条件でプログラムをつくり、y軸方向の粒子速度を取得するため $(v_k+v_l)/\sqrt{2}$ を使い、グラフを作成した (Fig. 3.6)。S-FDTD法のグラフと完全一致ではなかったため、周波数解析をして比較したところ Fig. 3.7の通り、ほぼ同じ形となったため、固体の45°回転座標系によるFDTD法の計算法が正しい事がわかる。

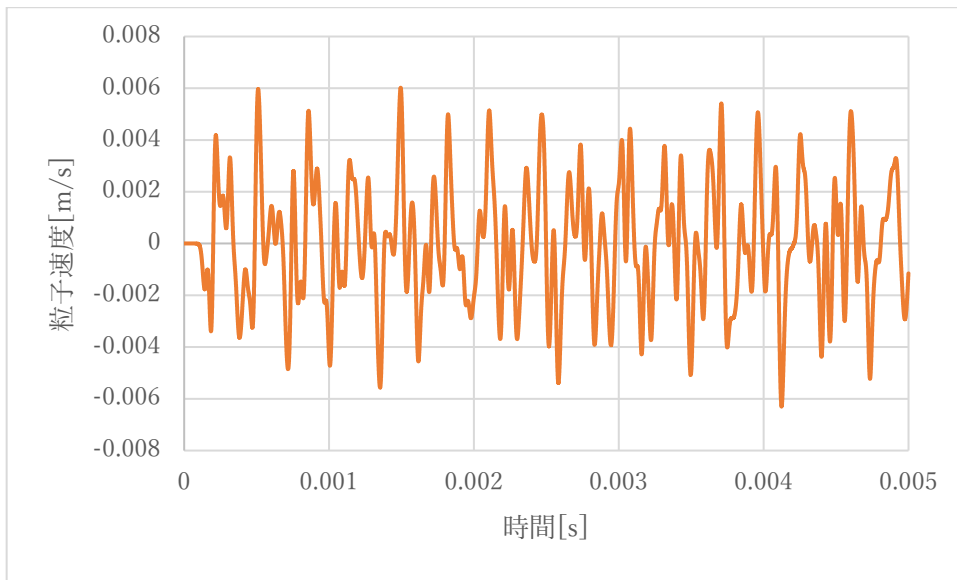


Fig. 3.6 RLF 法による受信点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

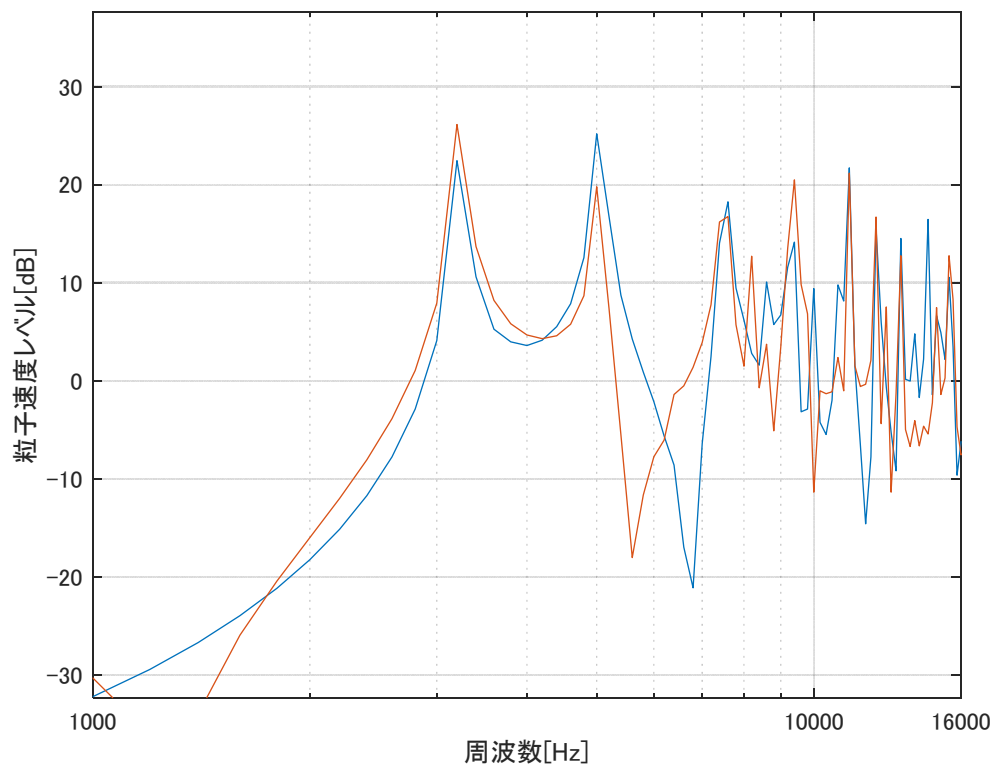


Fig. 3.7 周波数解析による固体のSLF法とRLF法の比較

3.2 固体の CE-FDTD 法

固体の CE-FDTD 法を考える際、流体の CE-FDTD 法と同じように $a=0$ の場合 SLF に $a=1/2$ の場合 RLF になるように立式する。

(1) 更新式

x, y, k, l 方向の粒子速度更新式、 xy, kl のせん断応力更新式は変わらず(2.31), (2.32), (2.35), (3.1), (3.2), (3.5)を用いる。 k, l の垂直応力更新式は x, y との関係より次式で求める。

$$T_{kk} = \frac{T_{xx}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{yy}}{\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

$$T_{ll} = -\frac{T_{xx}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{yy}}{\sqrt{2}} \quad (3.7)$$

上記の関係式を使い式(3.6)を式(3.3)に、式(3.7)を式(3.4)に代入した式をそれぞれ式(3.8), (3.9)とする。式(3.8), (3.9)をそれぞれ足し引きすると、 v_k, v_l を用いて T_{xx}, T_{yy} の更新式を表すことができる。式(2.34), (2.35)と上記で得た v_k, v_l を用いた更新式を組み合わせる形で、SLF 法は $a=0$ の場合に、RLF 法は $a=1/2$ の場合に対応する式を作成した。

$$\begin{aligned} T_{xx}^{n+1}(i, j) = T_{xx}^n(i, j) + (1 - 2a) \frac{\Delta t}{\Delta} \left[(\lambda + 2\mu) \{V_x^{n+0.5}(i + 0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i - 0.5, j)\} \right. \\ \left. + \lambda \{V_y^{n+0.5}(i, j + 0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j - 0.5)\} \right] \\ + 2a\mu \frac{\Delta t}{\Delta} \left[\{V_k^{n+0.5}(i + 0.5, j + 0.5) - V_k^{n+0.5}(i - 0.5, j - 0.5)\} \right. \\ \left. - \{V_l^{n+0.5}(i - 0.5, j + 0.5) - V_l^{n+0.5}(i + 0.5, j - 0.5)\} \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{yy}^{n+1}(i, j) = T_{yy}^n(i, j) + (1 - 2a) \frac{\Delta t}{\Delta} \left[\lambda \{V_x^{n+0.5}(i + 0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i - 0.5, j)\} \right. \\ \left. + (\lambda + 2\mu) \{V_y^{n+0.5}(i, j + 0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j - 0.5)\} \right] \\ + 2a(\lambda + \mu) \frac{\Delta t}{\Delta} \left[\{V_k^{n+0.5}(i + 0.5, j + 0.5) - V_k^{n+0.5}(i - 0.5, j - 0.5)\} \right. \\ \left. - \{V_l^{n+0.5}(i - 0.5, j + 0.5) - V_l^{n+0.5}(i + 0.5, j - 0.5)\} \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

4 結果

(i) $a=0$ の時

固体の SLF 法で作成したグラフ Fig. 3.3 と完全一致のグラフができた (Fig. 3.8)。

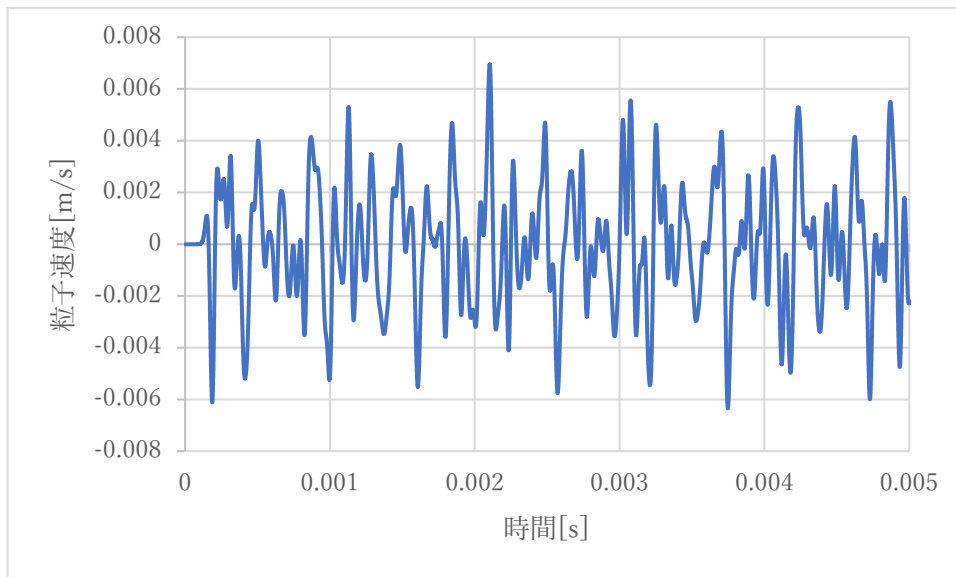


Fig. 3.8 固体の CE-FDTD 法の $a=0$ の時の受信点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

(ii) $a=1/2$ の時

固体の RLF 法で作成したグラフ Fig. 3.6 と完全一致のグラフができた (Fig. 3.9)。

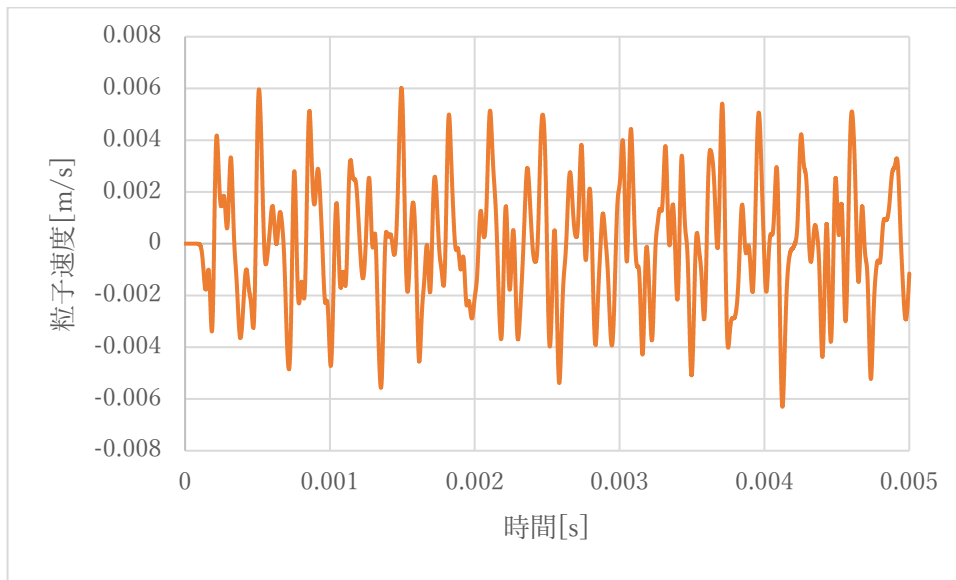


Fig. 3.9 固体の CE-FDTD 法の $a=1/2$ の時の受信点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

(iii) $0 < a < 1/2$ の時

Fig. 3.10 のように発散してしまった。

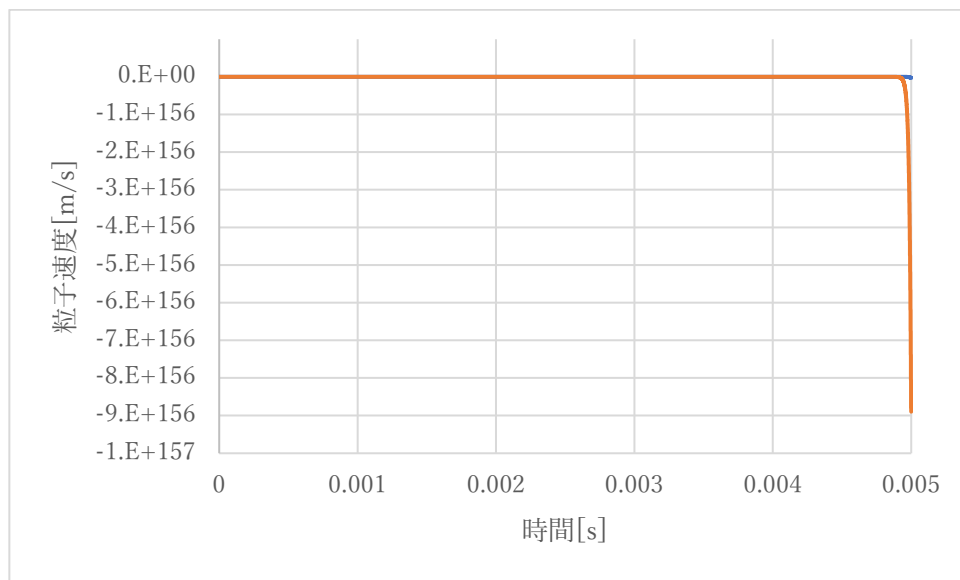


Fig. 3.10 固体の CE-FDTD 法の $a=0.01$ の時の受信点の y 軸方向の粒子速度の時間変化

5 結論

式(2.12)~(2.17)と同様に式を作り、CE-FDTD法の状態遷移方程式を作成すれば、

$$X^{n+1} = AX^n \quad (5.1)$$

となる。ここで、

$$X^n = [\mathbf{v}_{x0}^{n-0.5} \quad \mathbf{v}_{y0}^{n-0.5} \quad \mathbf{v}_{k0}^{n-0.5} \quad \mathbf{v}_{l0}^{n-0.5} \quad T_{xx0}^n \quad T_{yy0}^n \quad T_{kk0}^n \quad T_{ll0}^n \quad T_{xy0}^n \quad T_{kl0}^n]^T \quad (5.2)$$

$A =$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\Delta t}{\rho} S_x \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 i(1-2a)(\lambda+2\mu)\Delta t S_x & i(1-2a)\lambda\Delta t S_y & i \cdot 2a\mu\Delta t S_k & -i \cdot 2a\mu\Delta t S_l & 1 - \frac{(1-2a)(\lambda+2\mu)\Delta t^2}{\rho} S_x^2 \\
 i(1-2a)\lambda\Delta t S_x & i(1-2a)(\lambda+2\mu)\Delta t S_y & i \cdot 2a(\lambda+\mu)\Delta t S_k & i \cdot 2a(\lambda+\mu)\Delta t S_l & -\frac{(1-2a)\lambda\Delta t^2}{\rho} S_x^2 \\
 i \cdot \sqrt{2}(1-2a)(\lambda+\mu)\Delta t S_x & i \cdot \sqrt{2}(1-2a)(\lambda+\mu)\Delta t S_y & \frac{i \cdot 2a(\lambda+2\mu)\Delta t}{\sqrt{2}} S_x & \frac{i \cdot 2a\lambda\Delta t}{\sqrt{2}} S_l & -\frac{\sqrt{2}(1-2a)(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\rho} S_x^2 \\
 -i \cdot \sqrt{2}(1-2a)\mu\Delta t S_x & i \cdot \sqrt{2}(1-2a)\mu\Delta t S_y & \frac{i \cdot 2a\lambda\Delta t}{\sqrt{2}} S_k & \frac{i \cdot 2a(\lambda+2\mu)\Delta t}{\sqrt{2}} S_l & \frac{\sqrt{2}(1-2a)\mu\Delta t^2}{\rho} S_x^2 \\
 i\mu\Delta t S_y & i\mu\Delta t S_x & 0 & 0 & -\frac{\mu\Delta t^2}{\rho} S_x S_y \\
 0 & 0 & \frac{i\mu\Delta t}{\sqrt{2}} S_l & \frac{i\mu\Delta t}{\sqrt{2}} S_k & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{i\Delta t}{\rho} S_y & 0 \\
 \frac{i\Delta t}{\rho} S_y & 0 & 0 & \frac{i\Delta t}{\rho} S_x & 0 \\
 0 & \frac{i\Delta t}{\sqrt{2}\rho} S_k & 0 & 0 & \frac{i\Delta t}{\sqrt{2}\rho} S_l \\
 0 & 0 & \frac{i\Delta t}{\sqrt{2}\rho} S_l & 0 & \frac{i\Delta t}{\sqrt{2}\rho} S_k \\
 -\frac{(1-2a)\lambda\Delta t^2}{\rho} S_y^2 & -\frac{2a\mu\Delta t^2}{\sqrt{2}\rho} S_k^2 & \frac{2a\mu\Delta t^2}{\sqrt{2}\rho} S_l^2 & -\frac{(1-2a) \cdot 2(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\rho} S_x S_y & 0 \\
 1 - \frac{(1-2a)(\lambda+2\mu)\Delta t^2}{\rho} S_y^2 & -\frac{2a(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\sqrt{2}\rho} S_k^2 & -\frac{2a(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\sqrt{2}\rho} S_l^2 & -\frac{(1-2a) \cdot 2(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\rho} S_x S_y & -\frac{2 \cdot 2a(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\sqrt{2}\rho} S_k S_l \\
 -\frac{\sqrt{2}(1-2a)(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\rho} S_y^2 & 1 - \frac{2a(\lambda+2\mu)\Delta t^2}{2\rho} S_k^2 & -\frac{2a\lambda\Delta t^2}{2\rho} S_l^2 & -\frac{2\sqrt{2}(1-2a)(\lambda+\mu)\Delta t^2}{\rho} S_x S_y & -\frac{2a \cdot 2(\lambda+\mu)\Delta t^2}{2\rho} S_k S_l \\
 -\frac{\sqrt{2}(1-2a)\mu\Delta t^2}{\rho} S_y^2 & -\frac{2a\lambda\Delta t^2}{2\rho} S_k^2 & 1 - \frac{2a(\lambda+2\mu)\Delta t^2}{2\rho} S_l^2 & 0 & -\frac{2a \cdot 2(\lambda+\mu)\Delta t^2}{2\rho} S_k S_l \\
 -\frac{\mu\Delta t^2}{\rho} S_x S_y & 0 & 0 & 1 - \frac{\mu\Delta t^2}{\rho} (S_x^2 + S_y^2) & 0 \\
 0 & -\frac{\mu\Delta t^2}{2\rho} S_k S_l & -\frac{\mu\Delta t^2}{2\rho} S_k S_l & 0 & 1 - \frac{\mu\Delta t^2}{2\rho} (S_k^2 + S_l^2)
 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$S_x = \frac{2 \sin(k_x \cdot \Delta/2)}{\Delta} \quad (5.4)$$

$$S_y = \frac{2 \sin(k_y \cdot \Delta/2)}{\Delta} \quad (5.5)$$

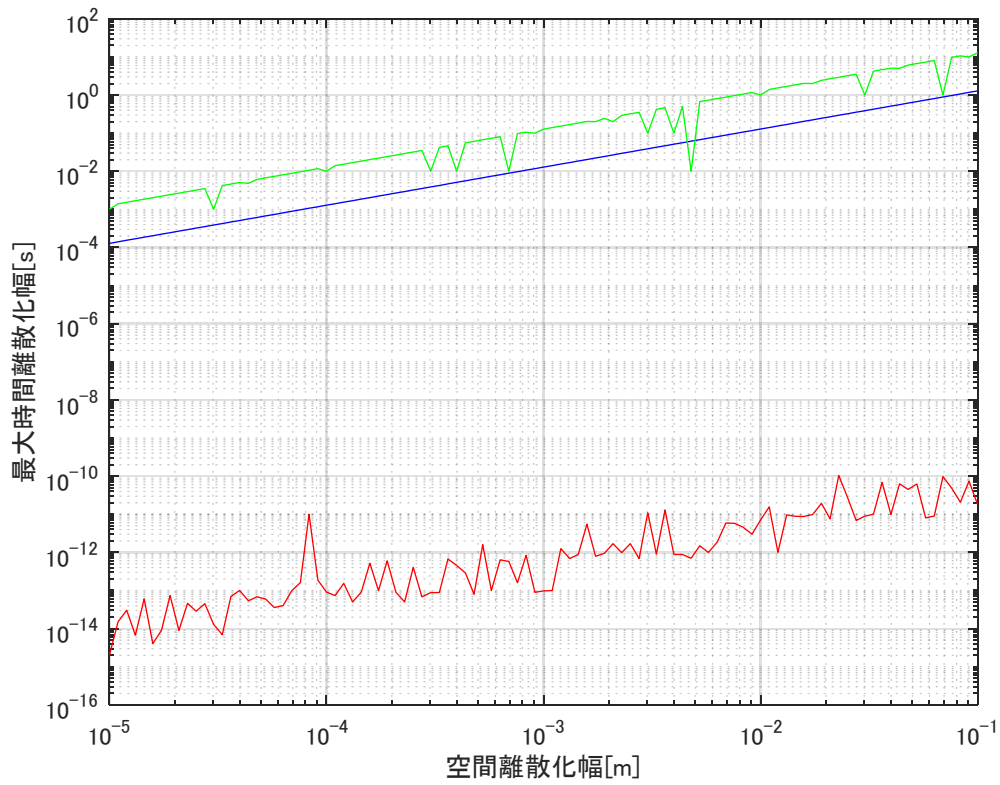
$$S_k = \frac{2 \sin(k_x \cdot \Delta/2 + k_y \cdot \Delta/2)}{\Delta} \quad (5.6)$$

$$S_l = \frac{2 \sin(-k_x \cdot \Delta/2 + k_y \cdot \Delta/2)}{\Delta} \quad (5.7)$$

である。また、式(5.2)の T は転置を表す。

A のすべての固有値の絶対値が 1 以下でなければならない安定条件を求めて、固体の S-FDTD、45° 回転座標系による FDTD 法と比較すると、Fig. 5.1 のように時間離散化幅が小さい必要があることがわかり、計算時間が大幅に増えてしまうことがわかった。

本研究では、RLF 法を開発できた。しかし、SLF 法と RLF 法を組み合わせた計算精度の高い CE-FDTD 法を開発することは叶わなかった。今後の課題として、他の参照点の配置方法などを考え、組み合わせる事ができるかを考える必要がある。



- 固体の S-FDTD 法
- 固体の 45° 回転座標系による FDTD 法
- 固体の CE-FDTD 法

Fig. 5.1 安定条件を満たす最大時間離散化幅

参考文献

- [1] K. S. Yee, “Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell’s Equations in Isotropic Media, “IEEE Trans. Antennas Propag., IEEE Trans. AP-148, 302-307,1966.
- [2] 土屋隆生, 杉浦恭輔, 岩谷幸雄, 大谷真, “粒子速度を用いた CE-FDTD 法-2次元の場合”, 信学技報 115(US-102), 57-60, 2015.
- [3] 豊田政弘, “時間領域有限差分法を用いた凡用的な連成解析手法の開発”, 音響学会誌 72(11), 697-702, 2016.