

周期構造による音響透過損失の
性能向上と解析方法に関する検討

関西大学大学院 理工学研究科
環境都市工学専攻 建築学分野
18M6425 竹村美穂
指導教員 _____

論文要旨

近年、自然界には存在しない物理現象を創生するメタマテリアルという構造が注目を集めている。その中で、波長よりも十分に小さい散乱体を周期的に配置し、音を制御するソニッククリスタルやフォノンニッククリスタルの音響特性に関する研究が盛んに行われている。このような周期構造においては、バンドギャップと呼ばれる周波数帯域が存在し、音波が干渉して散乱体の間を通り抜けられず、反射することによって顕著に音波が減衰することが明らかになっている。このバンドギャップは道路交通騒音などを効率的に遮断する可能性を秘めているが、単にバンドギャップが存在するという性質だけでは広帯域の遮音効果が見込めないため、周期構造を用いた遮音壁のすべてが道路交通騒音対策として十分な性能をもっているとはいえない。道路交通騒音遮音壁として周期構造を用いた遮音壁を実用化するためには、パラメータの最適化が重要となる。

本論文は第1部 周期構造を用いた道路交通騒音遮音壁の性能向上、第2部 時間領域有限差分 (Finite-Difference Time-Domain: FDTD) 法による周期構造の斜入射音響透過損失の解析 の2部構成である。

第1部ではパラメトリックスタディによって周期構造の道路交通騒音遮音壁への応用の可能性を検討した。自動車走行騒音の周波数特性を算出し、さらに遮音壁の性能をA特性パワーレベルという1つの数値で評価する方法を提案した。また、性能を向上させるため、散乱体の形状や材質の変更を検討した。結果として、周期構造を用いた遮音壁は低域の共鳴、中域のバンドギャップ、高域の吸音の3つの効果によって道路交通騒音を広帯域にわたって遮音できることを示した。ただし、ここでの結果は垂直入射解析に基づいたものであり、より詳細な周期構造遮音壁の性能評価のためには斜入射解析を行う必要がある。

第2部では2次元音場において1次元的に散乱体が周期配置された構造に平面音波が斜入射するときのFDTD法を用いた2通りの解析方法について調査した。1つめは周期構造を従来のFDTD法を用いた通常音場において評価する方法である。通常音場では無限個に近い数の散乱体を並べた非常に広い解析範囲を設定した。解析範囲が広がると計算時間が長くなるだけでなく、FDTD法が近似によって数値解を得る際に生じる数値分散性に起因する計算誤差が積み重なり大きくなることがわかった。2つめは領域変換を適用した変換音場において評価する方法である。これは電磁場ですでに提案されている手法を参考にした、周期構造の一部を取り出した単位構造に連続境界を適用し、かつ単位構造同士の位相差をなくすというものである。解析方法としては、最初に単位構造中の音圧・粒子速度を位相差を考慮した変数を用いて連続方程式・運動方程式を変換し、次にそれらを適切に離散化するためのデュアルグリッドを導入した。通常音場と変換音場の透過損失や音圧分布を比較するとよく一致した。しかしながら、変換音場では位相速度が通常音場の

音速とは異なり，その結果，分散性が生じるために入射角に依存した計算誤差が生じることが確認された。この分散性について解析した結果，変換音場では伝搬角によって位相速度が変化し，入射角が大きいほどこの傾向は大きくなることがわかった。また，斜入射の場合，変換音場では位相速度が速くなるため，解の安定のためには通常音場よりも細かい時間離散化幅を採用しなければならないことが示された。一方，変換音場では，入射角が 0 rad でないとき，常に2個の解が存在し，それぞれの解が干渉しあっていることもわかった。変換音場の導入により，通常音場よりも短時間で高域までの安定した解を得ることができるため，変換音場を用いた手法は無限個の周期構造を近似する解析方法のひとつとして，従来の FDTD 法よりも効率的に斜入射音場を解析できることが示唆された。

第 1 部 周期構造を用いた道路交通騒音遮音壁の性能向上

1.1	はじめに	1
1.1.1	既往研究	1
1.1.2	研究目的	3
1.2	評価方法と計算モデル	4
1.2.1	道路交通騒音の周波数特性と遮音壁の性能評価方法	4
1.2.2	周期構造遮音壁の計算モデル	9
1.3	開口や孔のない周期構造遮音壁の数値計算例	10
1.4	開口を設けた周期構造遮音壁の数値計算例	12
1.4.1	開口を設けた円筒のモデル	12
1.4.2	吸音材で覆った開口を設けた円筒	18
1.5	孔を開けた周期構造遮音壁の数値計算例	21
1.5.1	孔を開けた円筒のモデル	21
1.5.2	吸音材のない孔を開けた円筒	22
1.5.3	吸音材で覆った孔を開けた円筒	25
1.6	まとめ	28
	参考文献	29

第 2 部 時間領域有限差分法による周期構造の斜入射音響透過損失の解析

2.1	はじめに	30
2.1.1	既往研究	30
2.1.2	研究目的	32
2.2	通常音場の定式化	33
2.2.1	支配式	33
2.2.2	離散化	34
2.2.3	音源	36
2.2.4	PML の減衰係数	37
2.3	通常音場の数値計算例	40
2.3.1	通常音場の解析領域	40
2.3.2	透過損失	43

2.3.3	垂直入射の透過損失	46
2.4	通常音場の分散性解析と安定性解析.....	47
2.4.1	振幅の増幅率を用いた数値的な安定性解析.....	47
2.4.2	数値的な分散解析	49
2.5	変換音場の定式化	52
2.5.1	音場の変換	52
2.5.2	支配式	54
2.5.3	離散化	58
2.5.4	音源	61
2.6	変換音場の数値計算例	62
2.6.1	変換音場の解析領域	62
2.6.2	透過損失	63
2.6.3	音圧分布	68
2.7	変換音場の分散性解析と安定性解析.....	72
2.7.1	支配式	72
2.7.2	理論的な分散解析	74
2.7.3	理論的な安定性解析	78
2.7.4	時間項を用いた数値的な安定性解析.....	79
2.7.5	振幅の増幅率を用いた数値的な安定性解析.....	94
2.7.6	振幅の増幅率を用いた数値的な分散解析.....	98
2.7.7	変換音場への点音源の配置	106
2.8	変換音場の計算効率と精度向上	113
2.8.1	計算効率	113
2.8.2	高周波数帯域の計算例	115
2.8.3	PML の最適化	120
2.9	まとめ	128
	参考文献	129

第 1 部

周期構造を用いた道路交通騒音遮音壁の性能向上

1.1 はじめに

1.1.1 既往研究

1980年代から、周期的に配置された波長よりも十分に小さい構造をもつ誘電体材料の特性に関する多くの研究が行われており、この構造はフォトニッククリスタルと呼ばれている[1-5]。これらの構造中では電磁波が伝搬できない周波数帯域であるバンドギャップが存在することが示されている。

近年、ソニッククリスタルと呼ばれる音場に周期的に固体を配置した構造に関する研究も注目を集めている。鋼製で中空の円筒を格子状に配置したソニッククリスタルの音響性能が実験的に研究されている[6]。この実験では図 1.1.1 のような台に垂直に長さの異なる円筒が複数本、立方対称で周期的に配置された構造を対象とし、円筒の軸方向に垂直な音波を放射した場合の減衰が屋外で測定された。このような周期的な構造において、音波は円筒の間を複雑に伝搬する。しかしながら、入射波・反射波・透過波の干渉によって円筒の間を通り抜けられずに反射して顕著に減衰する特定の周波数帯域が存在することが示されており、これを電磁波の場合と同様にバンドギャップと呼ぶ。またこの減衰に影響を与えるパラメータは散乱体である円筒の体積分率であるという記述がある。

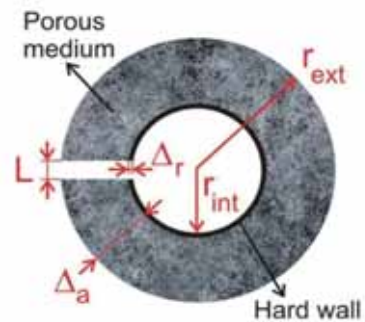


図 1.1.1 ソニッククリスタル

ソニッククリスタルを用いた遮音壁としての実用化にむけて、その透過損失を向上させるためのさらなる研究が行われている。例えば、散乱体の形状や材料の工夫により、構造の周期性によるバンドギャップに加えて個々の散乱体に機能を持たせることが可能である。図 1.1.2 のように円筒にスリット状の開口を設けると断面が C 型になり、円筒はヘルムホルツ共鳴器としての役割を果たす。このような形状の変更によって低周波帯域で新たな透過損失のピークが生じることが示されている[7, 8]。また、C 型円筒をロックウールで覆った遮音壁は共鳴とバンドギャップが生じる性質に併せて中高周波数帯域を吸音し、透過損失を向上させることが示されている。このような C 型円筒散乱体を利用した遮音壁の性能は実験により検討されており、従来の遮音壁と同等の性能を有することが明らかになったため、今後道路交通騒音遮音壁としての適用が期待されている。



(a) 遮音壁



(b) 断面図

図 1.1.2 ソニッククリスタル遮音壁

1.1.2 研究目的

ソニッククリスタル遮音壁，すなわち周期構造を用いた遮音壁が実現可能となれば，従来の連続な遮音壁と比較して円筒同士の隙間からの眺望が期待でき，材料の面でもコストを減らすことが可能となる。本稿では周期構造遮音壁の特徴を数値解析を用いて考察し，道路交通騒音を低減するための装置として応用，また最適化により性能を向上させることを目的とする。

構造の周期性によるバンドギャップの周波数位置と効果の大きさの両方が波の入射角と円筒の配置といった要因に依存するが，単にバンドギャップが存在するという性質だけでは広帯域の遮音効果が見込めないため，周期構造遮音壁が道路交通騒音対策として十分な性能を持っているとはいえない。自動車走行騒音の周波数特性は車両・路面の種類・走行状態により異なるが[9, 10]，ここでは乗用車の自動車走行騒音の周波数特性モデルを作成し，遮音壁を1つの数値で評価する。

はじめに開口や孔がない円筒の周期構造遮音壁がもつ特性を調査し，その後円筒に開口を設けたり孔を開けたりした周期構造遮音壁の性能について，パラメトリックスタディを行い性能評価した結果を報告する。

1.2 評価方法と計算モデル

本章では ASJ RTN-Model 2013[9]を参照し、乗用車の自動車走行騒音を道路交通騒音として周波数特性を算出する。この周波数特性から周期構造遮音壁の透過損失を差し引き、遮音壁を 1 つの数値で評価する方法を提案する。さらに計算モデルの各種条件を決定する。

1.2.1 道路交通騒音の周波数特性と遮音壁の性能評価方法

自動車走行騒音の A 特性音響パワーレベル L_{WA} [dB]は次式で計算する。

$$L_{WA} = a + b \log_{10} V + C \quad (1.2.1)$$

ただし、 V は走行速度 [km/h]、 a は車種別に与えられる定数、 b は速度依存性を表す係数である。 L_{WA} は路面性状や道路勾配等の道路条件によって変化するが、これらの要因によるパワーレベルの変化を考慮するための補正項 C は 0 とする。また、ここでは定常走行区間を想定し、 $V=80$ とする。車種分類は 4 車種分類の乗用車のみを対象とし、このとき $a=46.4$ 、 $b=30$ が与えられ、 $L_{WA}=103.5$ となる。

さて、密粒舗装における自動車走行騒音のパワースペクトルは 1/3 オクターブバンドの場合は中心周波数を 50 Hz~5 kHz として周波数帯域別に与える。定常走行及び非定常・減速走行の場合、 i 番目の帯域の中心周波数 $f_{c,i}$ [Hz]における補正量 $\Delta L_W(f_{c,i})$ [dB]は次式で表される。

$$\Delta L_W(f_{c,i}) = -20 \log_{10} \left\{ 1 + \left(\frac{f_{c,i}}{2500} \right)^2 \right\} \quad (1.2.2)$$

一方、 $f_{c,i}$ における周波数重み付け特性 A の値 $\Delta L_A(f_{c,i})$ [dB][11]は表 1.2.1 のとおりである。

表 1.2.1 中心周波数における周波数重み付け特性 A の値

$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$
50	-30.2	200	-10.9	800	-0.8	3150	+1.2
63	-26.2	250	-8.6	1000	0	4000	+1
80	-22.5	315	-6.6	1250	0.6	5000	+0.5
100	-19.1	400	-4.8	1600	+1		
125	-16.1	500	-3.2	2000	+1.2		
160	-13.4	630	-1.9	2500	+1.3		

A 特性相対バンドパワーレベルのエネルギー合成値を 0 dB とするための調整値 ΔL_{adj} [dB] は次式で計算する。

$$\Delta L_{\text{adj}} = -10 \log_{10} \sum_i 10^{\{\Delta L_W(f_{c,i}) + \Delta L_A(f_{c,i})\}/10} \quad (1.2.3)$$

式(1.2.2), (1.2.3), 表 1.2.1 より $f_{c,i}$ における A 特性相対バンドパワーレベル $\Delta L_{WA}(f_{c,i})$ [dB] は次式で表される。

$$\Delta L_{WA}(f_{c,i}) = \Delta L_W(f_{c,i}) + \Delta L_A(f_{c,i}) + \Delta L_{\text{adj}} \quad (1.2.4)$$

式(1.2.1), (1.2.4)より $f_{c,i}$ [Hz] における A 特性パワーバンドレベル $L_{WA}(f_{c,i})$ [dB] は次式で計算する。

$$L_{WA}(f_{c,i}) = L_{WA} + \Delta L_{WA}(f_{c,i}) \quad (1.2.5)$$

図 1.2.1 に式(1.2.5)で求められる本稿で用いる道路交通騒音の 1/3 オクターブバンド周波数特性を示す。

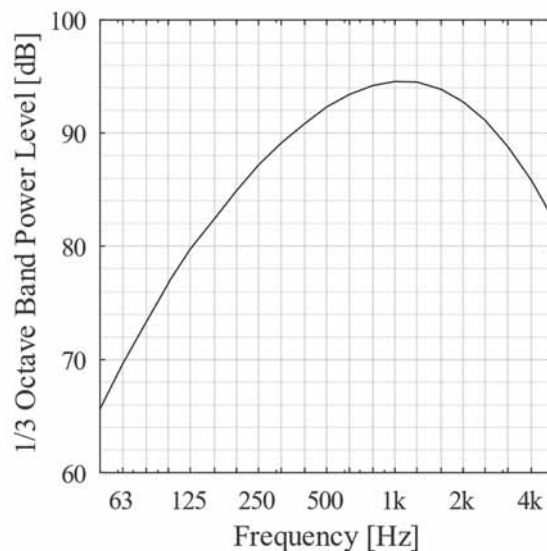


図 1.2.1 道路交通騒音の周波数特性

評価の精度をあげるため、遮音壁の透過損失は 50 Hz~5 kHz の 1/3 オクターブバンドの中心周波数を参考に 1/6 オクターブごとに数値的に解析する。1/6 オクターブごとの周波数の算出方法は以下のとおりである。ある帯域の中心周波数 f_c より 1/6 オクターブだけ高い周波数 f_1 , f_1 からさら 1/6 オクターブだけ高い周波数 f_2 は次式でそれぞれ表される。

$$f_1 = f_c \cdot 2^{\frac{1}{6}} \quad (1.2.6)$$

$$f_2 = f_1 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \quad (1.2.7)$$

求めたい周波数 f は f_1, f_2 の中心周波数であるから、次式で表される。

$$f = (f_1 \cdot f_2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.8)$$

1/3 オクターブバンドの中心周波数と透過損失を解析する周波数の関係は式(1.2.8)より表 1.2.2 のようになる。

表 1.2.2 1/3 オクターブバンドの中心周波数と 1/6 オクターブごとの周波数

$f_{c,i}$	$f_{c,j}$	$f_{c,i}$	$f_{c,j}$	$f_{c,i}$	$f_{c,j}$	$f_{c,i}$	$f_{c,j}$	
50	46.82	200	187.3	800	749.2	3150	2997	
	52.56		210.2		840.9		3364	
63	58.99	250	236.0	1000	943.9	4000	3376	
	66.22		264.9		1059		4238	
80	74.33	315	297.3	1250	1189	5000	4757	
	83.43		333.7		1335		5339	
100	93.64	400	374.6	1600	1498			
	105.1		420.4		1682			
125	118.0	500	471.9	2000	1888			
	132.4		529.7		2119			
160	148.7	630	594.6	2500	2379			
	166.9		667.4		2670			

遮音壁なし、ありのときの透過エネルギーレベルをそれぞれ L_{T0}, L_{T1} とすると j 番目の透過損失 TL は次式で表される。

$$TL(f_j) = L_{T0}(f_j) - L_{T1}(f_j) \quad (1.2.9)$$

透過損失は商用の有限要素解析ソフトウェアである COMSOL Multiphysics を使い、1/6 オクターブごとに離散的に解析する。ここからはこの結果を 1/6 オクターブバンドスペクトルとして扱う。すなわち、次式のように表される。

$$TL(f_{c,j}) = TL(f_j) \quad (1.2.10)$$

透過損失が 1/6 オクターブバンドで算出されていることに対して道路交通騒音の周波数特性が 1/3 オクターブバンドで算出されていることを考慮した A 特性パワーレベルの計算方法を考える必要がある。1/6 オクターブバンドの $j-1$ 番目, j 番目の帯域の道路交通騒音の A 特性パワーバンドレベルは, 1/3 オクターブバンドの i 番目の帯域の道路交通騒音の A 特性パワーバンドレベルを用いて次式で表される。

$$L_{WA}(f_{c,j-1}) = L_{WA}(f_{c,j}) = 10 \log_{10} \frac{P_A(f_{c,i})}{2}$$

$$\leftrightarrow L_{WA}(f_{c,j-1}) = L_{WA}(f_{c,j}) = L_{WA}(f_{c,i}) - 10 \log_{10} 2 \quad (1.2.11)$$

ただしこのとき, P_A [dB]は i 番目の音響パワーで, $j=2i$ である。式(1.2.10), (1.2.11)より $j-1$ 番目, j 番目の帯域の道路交通騒音の A 特性パワーバンドレベルから遮音壁の透過損失を引いた値 $L(f_{c,j-1})$, $L(f_{c,j})$ はそれぞれ次式のようになる。

$$L(f_{c,j-1}) = L_{WA}(f_{c,i}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,j-1}) \quad (1.2.12)$$

$$L(f_{c,j}) = L_{WA}(f_{c,i}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,j}) \quad (1.2.13)$$

式(1.2.12), (1.2.13)の関係を用いて 1 番目 (46.82Hz) から 42 番目 (5339Hz) の帯域までの A 特性パワーレベル L [dB]は次式のようにエネルギー合成することで表される。

$$L = 10 \log_{10} \left\{ 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,1})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,2})}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,41})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,42})}{10}} \right\}$$

$$\leftrightarrow L = \left\{ 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,1}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,1})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,2}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,2})}{10}} \right.$$

$$\left. + \dots + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,i}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,41})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,i}) - 10 \log_{10} 2 - TL(f_{c,42})}{10}} \right\}$$

$$\leftrightarrow L = 10 \log_{10} \left\{ 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,1}) - TL(f_{c,1})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,2}) - TL(f_{c,2})}{10}} \right.$$

$$\left. + \dots + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,i}) - TL(f_{c,41})}{10}} + 10^{\frac{L_{WA}(f_{c,i}) - TL(f_{c,42})}{10}} \right\} - 10 \log_{10} 2 \quad (1.2.14)$$

なお, 遮音壁がない場合は $L=L_{WA}=103.5$ [dB]となる。次節以降, 透過損失の周波数特性とこの L の値を用いて遮音壁の性能評価を行うこととする。

さて, 2018 年に ASJ-RTN Model が改訂された[10]。これに沿った周波数特性も算出する。自動車走行騒音の A 特性音響パワーレベル L_{WA} [dB]は式(1.2.1)と同様であるが, 車種分類が 3 車種分類に変更され, これに伴い小型車の定数, 係数が $a=45.8$, $b=30$ となった。このとき, $L_{WA}=102.9$ となる。さらに表 1.2.3 のような $f_{c,i}$ における A 特性相対バンドパワーレベル $\Delta L_{WA}(f_{c,i})$ [dB]が与えられるようになった。これらを踏まえると道路交通騒音の 1/3 オクターブバンド周波数特性は

図 1.2.2 のようになる。今後新たに検討を行う際には ASJ-RTN Model 2018 を参考にする必要があるだろう。

表 1.2.3 中心周波数における A 特性相対バンドパワーレベルの値

$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$	$f_{c,i}$	$\Delta L_{WA}(f_{c,i})$
50	-38.7	200	-21.2	800	-8.3	3150	-15.8
63	-25.4	250	-18.8	1000	-7.2	4000	-18.8
80	-32.7	315	-17.2	1250	-8.0	5000	-21.7
100	-29.8	400	-15.4	1600	-9.3		
125	-27.2	500	-13.3	2000	-10.8		
160	-25.0	630	-10.6	2500	-13.2		

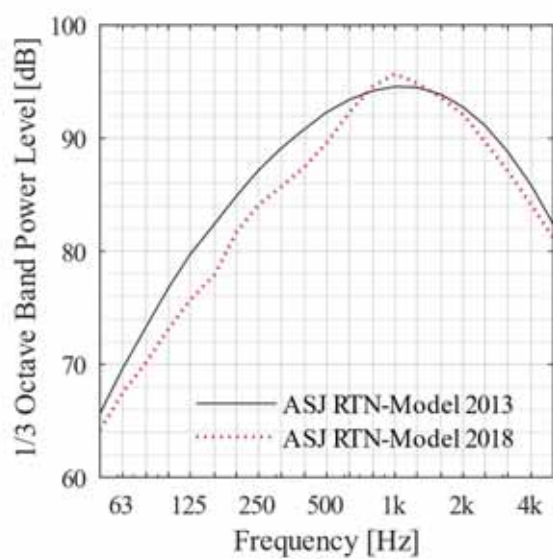


図 1.2.2 新しい道路交通騒音の周波数特性

1.2.2 周期構造遮音壁の計算モデル

商用の有限要素解析ソフトウェア COMSOL Multiphysics を用いた解析を行う。作成するモデルの特性により、適宜 2次元解析、または 3次元解析を行う。図 1.2.3 のように平面波が伝搬する x 軸方向に円筒の 3本の列を等間隔に配置しモデル化する。領域の上下には連続境界を適用する。連続境界の実装により y 軸方向に無限に連続する周期構造遮音壁に平面波が垂直入射する音場の解析ができる。左右には吸収境界を適用し、左の境界から振幅 1 Pa の平面波を放射する。3次元解析の場合には剛境界を利用し、 z 軸方向の高さが無限である状態を模擬する。媒質は密度が 1.2 kg/m^3 、音速が $c=340 \text{ [m/s]}$ の空気である。

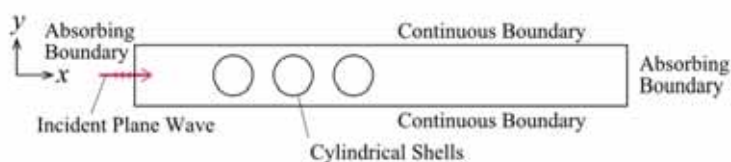
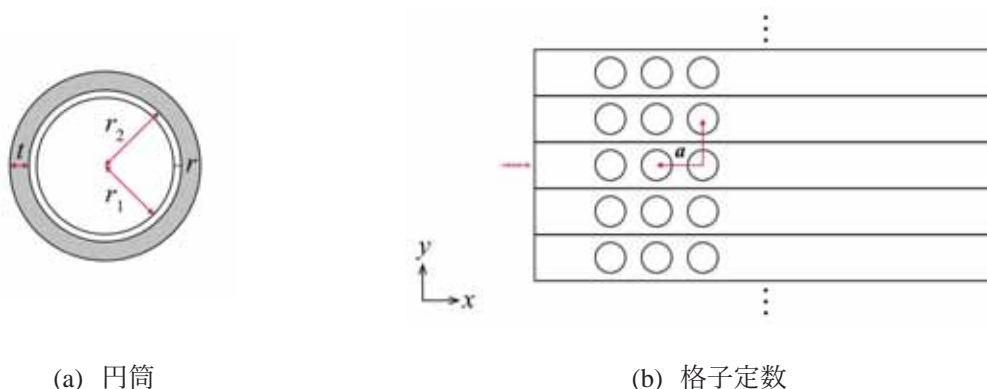


図 1.2.3 計算モデル

ここで、円筒の寸法や間隔の各条件を決定する。図 1.2.4 (a) のように円筒は厚さが $t=0.02 \text{ [m]}$ 、内側の半径は $r_1=0.18 \text{ [m]}$ 、外側の半径は $r_2=0.2 \text{ [m]}$ とする。円筒の外側をグレーで示した多孔質吸音材で覆い、この厚さは $t=0.05 \text{ [m]}$ とする。図 1.2.4 (b) に示す円筒同士の間隔は格子定数 $a=0.6 \text{ [m]}$ である。円筒には剛な材質を設定する。



(a) 円筒

(b) 格子定数

図 1.2.4 各種パラメータ

1.3 開口や孔のない周期構造遮音壁の数値計算例

はじめに、単純な周期構造遮音壁の性能について調査する。ここでは周期構造の寸法や配置について検討するため、剛な円筒を吸音材で覆わないものとする。1.2.2 節で設定した円筒の外側の半径が $r_2=0.2$ [m]、格子定数は $a=0.6$ [m] とした基準モデルの透過損失を図 1.3.1 に示す。このモデルは円筒が閉じられた状態であるため、円筒の厚さや内側の半径の設定は解析に影響を与えない。また、本節での解析はすべて 2 次元で行っている。図より、250 Hz、500 Hz、1 kHz 付近にそれぞれバンドギャップが生じる。このとき A 特性パワーレベルは $L=98.7$ [dB] となり、遮音壁がない場合の 103.5 dB と比べて約 4.8 dB 減衰する。

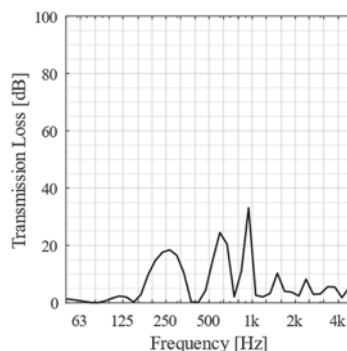


図 1.3.1 吸音材のないモデルの透過損失

本稿の目的は円筒の半径と格子定数を変更せずにその他の要素の検討により周期構造遮音壁の性能を向上させることであるが、基準モデル以外の寸法の際の透過損失、A 特性パワーレベルも解析し、円筒の半径や格子定数が性能に及ぼす影響についても考察することとする。円筒の半径について、図 1.3.2 (a) は格子定数を $a=0.6$ [m] で固定して半径を $r_2=0.15, 0.2, 0.25$ [m] としたときの透過損失である。半径が大きくなるほど 250 Hz 付近のバンドギャップの周波数が広帯域になり、かつバンドギャップの効果が大きく、それぞれ $L=100, 98.7, 97.2$ [dB] となった。図 1.3.2 (b) は半径を $r_2=0.2$ [m] で固定して格子定数を $a=0.5, 0.6, 0.7$ [m] としたときの透過損失である。格子定数が大きくなるほど 265 Hz 付近のバンドギャップの周波数が狭帯域になり、かつバンドギャップの効果が小さく、それぞれ $L=97.7, 98.7, 100$ [dB] となった。このように、円筒の半径が大きいとき、また格子定数が小さいときに周期構造遮音壁は密になるために性能が向上することがわかる。

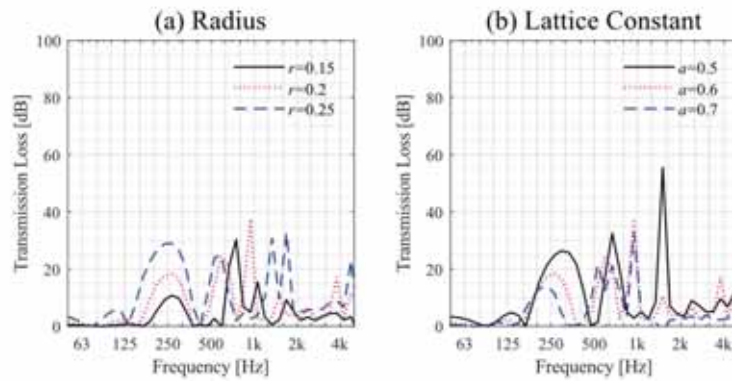


図 1.3.2 円筒の半径，格子定数ごとの透過損失

周期構造遮音壁の性能を向上させるためのひとつの手段として多孔質吸音材で円筒の外側を覆うが，この吸音材の物性値を決定する必要がある。図 1.3.3 に吸音材のない基準モデル（図の凡例には“Uniform”と記載），さらに厚さが $t=0.05$ [m] で流れ抵抗率をそれぞれ $R_f=1000$ ， 10000 ， 100000 [Pa s/m²] とした吸音材で覆った円筒の透過損失を示す。どの流れ抵抗率の場合も吸音材で覆うことでほとんどの周波数帯域で透過損失が大きくなるのがわかる。バンドギャップの周波数位置は各流れ抵抗率で大きな差は生じないが，効果の大きさが異なり，吸音材がある場合の A 特性パワーレベルはそれぞれの流れ抵抗率に対して $L=83.5$ ， 77.1 ， 78.0 [dB] となった。この結果を踏まえて，今後の解析にはすべて $R_f=10000$ [Pa s/m²] の吸音材を採用するものとする。

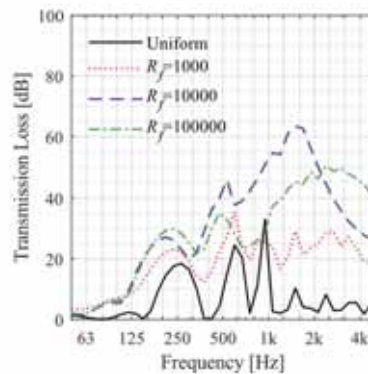


図 1.3.3 吸音材の流れ抵抗率ごとの透過損失

1.4 開口を設けた周期構造遮音壁の数値計算例

1.4.1 開口を設けた円筒のモデル

本節では円筒に開口を設け、断面をC型にしたモデルの透過損失、A特性パワーレベルを2次元で解析する。図1.4.1に本節で使用する円筒の形状の断面図を示す。図1.4.1(a)~(d)に共通した内側の剛な円筒は1.2.2節で設定したように厚さが $t=0.02$ [m]、内側の半径は $r_1=0.18$ [m]、外側の半径は $r_2=0.2$ [m]となっている。次に図1.4.1(b), (d)にはスリット状の開口を設け、C型の円筒とする。開口の幅を d [m]とし、開口の幅や開口の入射平面波に対する角度のパラメトリックスタディを行う。図1.4.1(c), (d)には剛な円筒の周りを厚さが $t=0.05$ [m]のグレーで示した吸音材で覆う。流れ抵抗率は1.3章で決定した $R_f=10000$ [Pa s/m²]とする。また、図1.4.2のように入射平面波に対するC型円筒の開口の角度を θ [rad]とする。

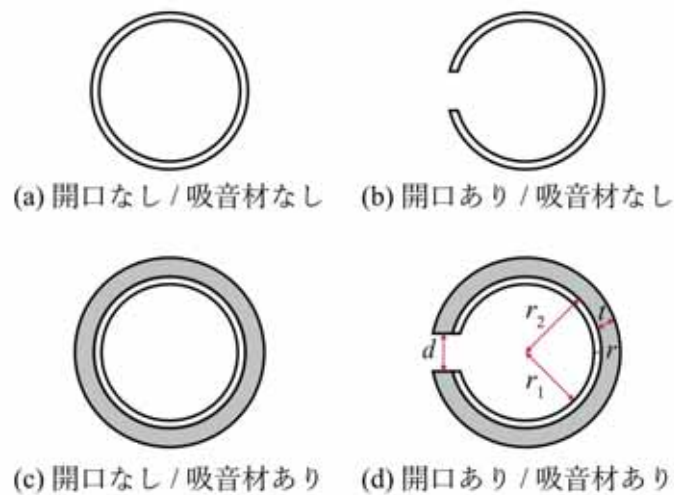


図 1.4.1 C型円筒の形状

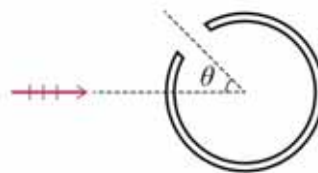


図 1.4.2 C型円筒の開口の角度

1.4.2 吸音材のない開口を設けた円筒

A) 開口の幅の検討

開口・吸音材のない剛な円筒と、吸音材のない円筒に角度 $\theta=0$ [rad]で幅が d [m]の開口を設けたC型円筒の透過損失を比較する。図1.4.3に開口の幅が $d=0.05$ [m]のモデルの透過損失を示し、これを例にあげC型円筒の考察を行う。青の破線で示したC型円筒との比較対象として黒の実線で基準モデルを示す。 $d=0.05$ [m]のグラフにはバンドギャップとは独立して118 Hzに新たな透過損失のピークが生じている。これは、C型円筒の開口寸法が波長に比べて小さく、空気がバネとして運動するためにヘルムホルツ共鳴器と同様の働きをするからであると考えられる。しかしながら、開口によるピークは265 Hz付近のバンドギャップと干渉し、バンドギャップの効果が小さくなっていることがわかる。この結果A特性パワーレベルは $L=99.2$ dBとなり、基準モデルの $L=98.7$ [dB]よりも性能が落ちた。

図1.4.4に開口のない円筒と開口の幅 d を0.025, 0.05, 0.1, 0.2 mに変更したC型円筒のモデルの透過損失を示す。開口の有無に関わらず265 Hz付近、595 Hz付近でバンドギャップが生じている。開口がある場合は共鳴によるピークが低域にみられ、開口の幅が大きくなるほど高域にシフトする。開口によるピークとバンドギャップは開口の幅が大きくなるほど干渉し、バンドギャップの効果が小さくなっていることがわかる。A特性パワーレベルは開口があるときにそれぞれ $L=99.4, 99.2, 99.3, 98.9$ [dB]となった。いずれの場合も性能は大きく変わらないが、基準モデルよりも性能は落ちている。また、例えば $d=0.05$ [m]の118 Hzのようにピークの透過損失が大きくても一部の周波数しか減衰させることができないため、ピークの大きさのみで周期構造遮音壁の性能は評価できないことがわかる。道路交通騒音の周波数特性は500 Hzより高域で大きくなっているため、その周波数帯域を抑えなければ遮音壁としての性能がよいとはいえない。

より高域でのピークを生じさせるため、図1.4.5に d を0.4 mにしたモデルの透過損失を示し、開口のない円筒と $d=0.2$ [m]のC型円筒と比較する。このとき円筒の直径が0.4 mであるため、C型円筒は半円となる。開口によるピークは265 Hz付近のバンドギャップよりも周波数が高く、干渉が小さい。A特性パワーレベルは $L=98.2$ [dB]となり、基準モデルの $L=98.7$ [dB]と比較して性能がわずかに向上した。

以上より $\theta=0$ のときは吸音材のない開口を設けた周期構造遮音壁は、道路交通騒音のA特性パワーレベルが大きい周波数を抑制するために幅の大きい開口を設けることで高域にピークを生じさせるとよいということがわかった。

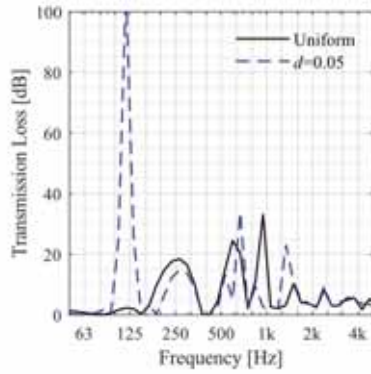


図 1.4.3 0.05 m の開口を
設けた C 型円筒の透過損失

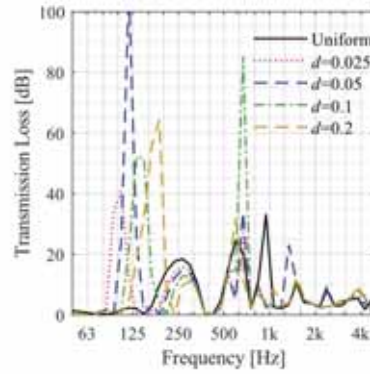


図 1.4.4 開口を設けた
C 型円筒の透過損失

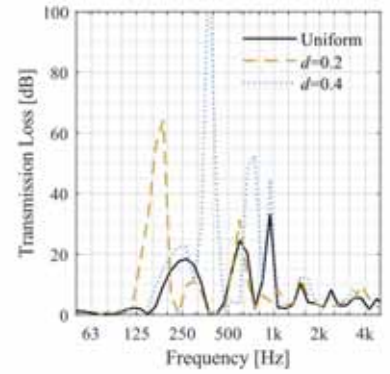


図 1.4.5 開口の幅が広い
C 型円筒の透過損失

B) 共鳴周波数

ここから、開口を設けた場合の共鳴周波数について考察する。3次元のヘルムホルツ共鳴器の共鳴周波数の算出方法を2次元に適用する。図 1.4.6 (a)のような3次元のヘルムホルツ共鳴器の共鳴周波数 f_0 は次式で表される[12]。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{V}} \quad (1.4.1)$$

ただし、 V は空洞容積、 G は開口部分の空気の動きやすさで次式のように表される。

$$G = \frac{s}{l_e} \quad (1.4.2)$$

ただし、 s は開口の断面積、 l_e はネックの実効長さである。これはネックの空気が1つのマスとして運動するとき実長 l に含まれる空気だけでなく、その前後に一緒に動かされる部分があり、それを付加質量と考えるため、計算には実長 l ではなく、 $l+\delta=l_e$ を用いる。この δ は開口端補正と呼ばれる。以上より、3次元のヘルムホルツ共鳴器の共鳴周波数は次式に書き換えられる。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{V(l+\delta)}} \quad (1.4.3)$$

開口が円形の場合はその直径を d として、 $\delta \approx 0.8d$ のように近似されるが、図 1.4.6 (b)のように開口がスリットの円筒型の吸音構造の場合は開口の幅が d 、高さが h として、開口端補正は次式のように近似される。

$$\delta = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \log_e \frac{2h}{d} \right) d \quad (1.4.4)$$

空洞面積を S とすると、 h が単位長さ 1 であるとき空洞容積は $V=S$ となる。また、図 1.4.6 (b) で $h=1$ かつ d が十分に小さいときの開口端補正は図 1.4.6 (c) のような 2 次元のヘルムホルツ共鳴器の開口端補正と同等とみなすことができる。3 次元のヘルムホルツ共鳴器の開口の断面積 s は 2 次元のヘルムホルツ共鳴器の開口の幅 d に対応する。したがって、式(1.4.3), (1.4.4)より 2 次元の共鳴周波数は次式のようにになる。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{S \left\{ l + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \log_e \frac{2}{d} \right) d \right\}}} \quad (1.4.5)$$

式(1.4.5)より、図 1.4.1 (b) の形状のヘルムホルツ共鳴周波数は次式で予測される。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{\pi r_1^2 \left\{ r + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \log_e \frac{2}{d} \right) d \right\}}} \quad (1.4.6)$$

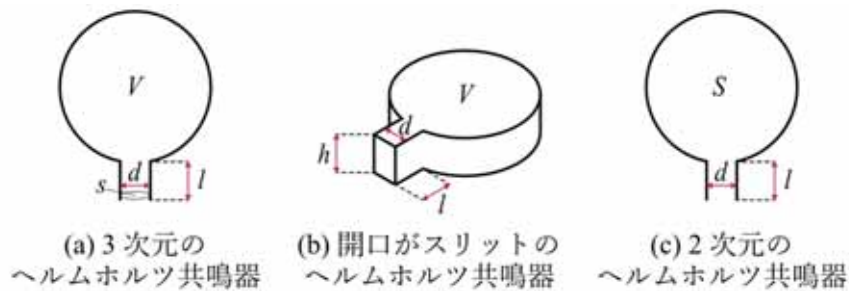


図 1.4.6 開口を設けた C 型円筒の透過損失

図 1.4.4, 1.4.5 で解析された $d=0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ [m] のピーク周波数 f_s と式(1.4.6)で算出される $d=0.025$ [m] から 0.005 m 刻みのヘルムホルツ共鳴周波数 f_0 を図 1.4.7 にプロットし比較する。これらの周波数は開口の幅 d が大きくなるほど高域にシフトする性質は合致している。 d が大きくなると f_s は一直線状に増加する一方で f_0 は対数的に増加する。開口の幅が $d=0.1$ [m] 以下のときは f_s が f_0 よりも小さくなっている。 $d \geq 0.2$ [m] のときは f_s が f_0 よりも大きい。 $d=0.4$ [m] のときは f_s と f_0 には大きく隔たりがあることから、半円の C 型円筒は共鳴器とは異なる減衰させる機能を持つことが考えられる。しかしながら、 d が小さい場合でも十分な精度で予測できているとは言えず、スリット状の開口を設けたときの 2 次元のヘルムホルツ共鳴器の開口端補正 δ の値について今後検討する必要がある。

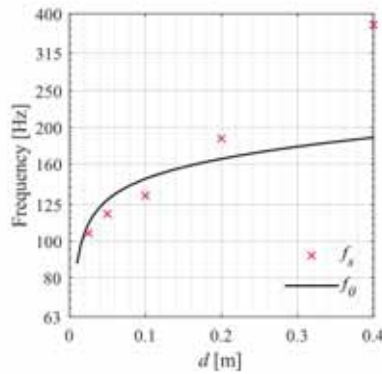


図 1.4.7 ピーク周波数とヘルムホルツ共鳴周波数

C) 開口の角度の検討

図 1.4.2 の入射平面波に対する C 型円筒の開口の角度 θ に関して調査する。図 1.4.8 に開口・吸音材のない剛な円筒と、吸音材のない円筒に角度 $\theta=0, \pi/4, \pi/2$ [rad] で幅が $d=0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ [m] の開口を設けた C 型円筒の透過損失を示す。なお $\theta=0$ と $\theta=\pi$, $\theta=\pi/4$ と $\theta=3\pi/4$ はそれぞれ同じ結果となる。A 特性パワーレベルは表 1.4.1 のようになり、 $d \leq 0.2$ [m] のときは $\theta=\pi/2$ が性能がよい。 $d \leq 0.2$ [m] のとき、どの角度でも 265 Hz 付近、595 Hz 付近でバンドギャップが生じている。バンドギャップは $\theta=\pi/2, \pi/4, 0$ の順に大きい。 $\theta=\pi/2$ のときは開口が大きいほどバンドギャップも大きくなり、さらにこのときには共鳴のピークとバンドギャップが干渉する現象も起きていない。 $d=0.4$ [m] のときはバンドギャップが $\theta=0, \pi/4$ では観測されるが $\theta=\pi/2$ ではバンドギャップが生じない。半円の C 型円筒は円筒同士の間隔が格子定数よりも大きくなる方向があるため、開口の入射波に対する角度によって散乱体として機能しなくなることがわかる。共鳴によるピークは $\theta=\pi/2$ が $\theta=0$ よりもやや高域にある。またピークの大きさは角度により異なる。しかしながら、このピークの大きさは解析を 1/6 オクターブバンドよりも詳細にすることで変わる可能性がある。A) 開口の幅の検討で考察した幅の大きい開口を設けることで高域にピークを生じさせるとよいという結論は開口と入射波の角度の関係により成り立たなくなる。適切な開口の幅と角度を設定する必要があるがモデルごとに大差はなく、剛な円筒型散乱体に開口を設けるだけでは性能が十分に向上したとはいえない。

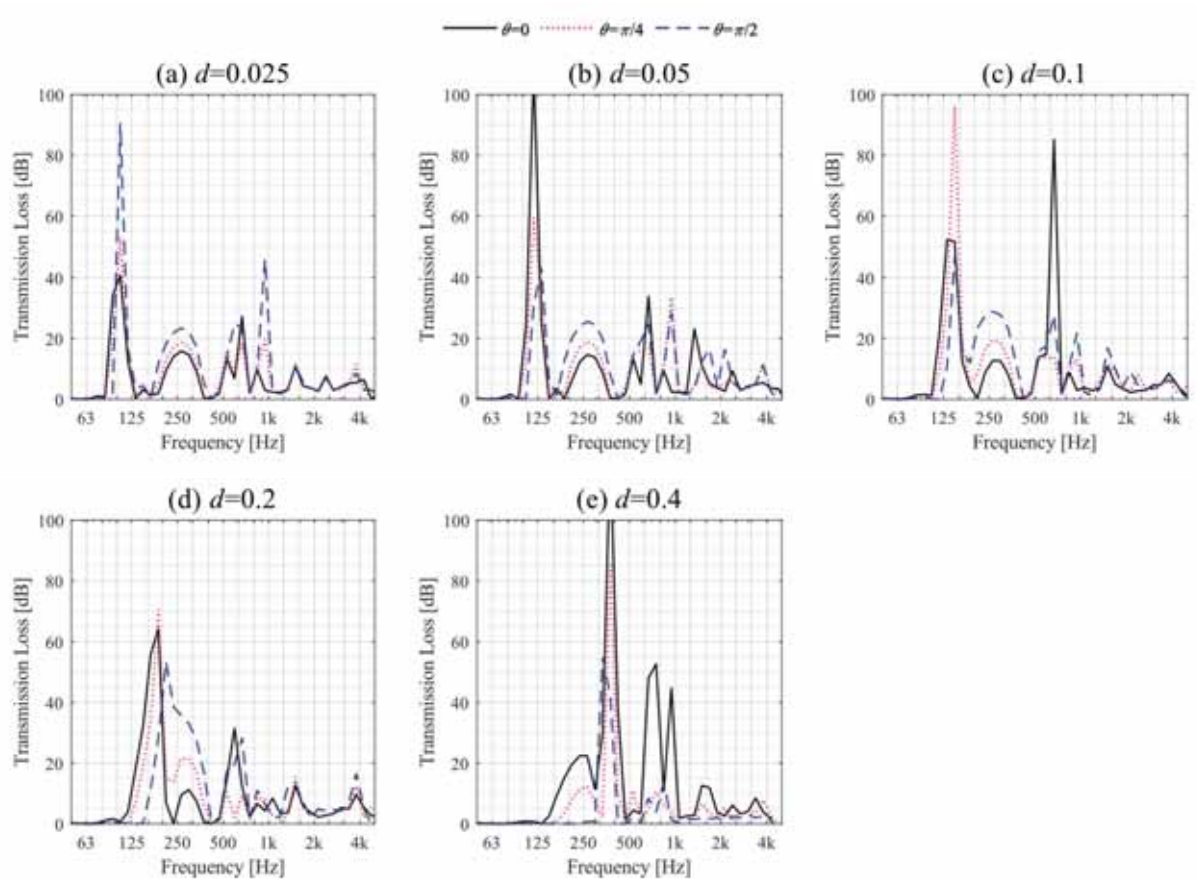


図 1.4.8 開口の幅，角度による透過損失

表 1.4.1 吸音材がないときの開口の幅，角度による A 特性パワーレベル

d [m]		0.025	0.05	0.1	0.2	0.4
L [dB]	$\theta=0$	99.4	99.2	99.2	98.9	98.2
	$\theta=\pi/4$	98.8	98.6	98.3	99.5	102
	$\theta=\pi/2$	98.6	98.1	98.3	98.3	101

1.4.2 吸音材で覆った開口を設けた円筒

A) 開口，吸音材の有無

開口・吸音材の有無による音響性能を比較する。図 1.4.9 に $\theta=0$ で $d=0.05$ [m]の開口なし/あり，吸音材なし/ありの 4 パターンのモデルの透過損失を示す。バンドギャップの効果は吸音材があることで大きくなり，やや低域にシフトすることがわかる。開口のある円筒では吸音材があり，なしのときともに低域で共鳴による透過損失のピークが生じる。共鳴とバンドギャップが干渉し，開口があるとバンドギャップの効果が小さくなる。C 型の際の開口によるピークは吸音材があるときのほうが小さく，また低域にシフトしているが，これは円筒の厚さによるものであると考えられる。開口ありかつ吸音材ありのときの吸音材の厚さ t を考慮した 2 次元のヘルムホルツ共鳴周波数は式(1.4.6)より次式のようになる。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{\pi r_1^2 \{(r+t) + 0.8d\}}} \quad (1.4.7)$$

式(1.4.7)よりヘルムホルツ共鳴器のネックが長くなるとヘルムホルツ共鳴周波数は低くなることわかる。さらに吸音材を使用する効果は特に 500 Hz よりも高周波数帯域によく現れており，開口に関係なくその効果は一定である。A 特性パワーレベルは開口なしかつ吸音材なしのとき 98.7 dB，開口ありかつ吸音材なしのとき 99.2 dB，開口なしかつ吸音材ありのとき 77.1 dB，開口ありかつ吸音材ありのとき 76.6 dB である。円筒の散乱体に開口を設けかつ吸音材で覆うことで遮音壁がないときの 103 dB より約 26 dB 減衰し，性能が向上することが示された。

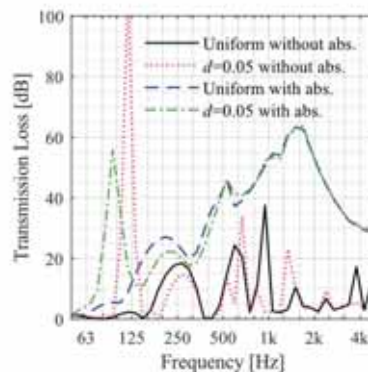


図 1.4.9 開口の有無による透過損失

B) 開口の幅の検討

図 1.4.10 に吸音材で覆った開口のない円筒と吸音材で覆った開口の幅 d を 0.025, 0.05, 0.1, 0.2 m に変更した C 型円筒のモデルの透過損失を示す。このとき、角度はすべて $\theta=0$ [rad]である。開口がある場合は透過損失のピークが生じ、これは開口の幅が大きくなると高域にシフトする。吸音材がないときには開口の有無にかかわらず生じていたバンドギャップは開口の幅が大きくなるほど共鳴のピークの周波数と近いために干渉し、 $d=0.2$ [m]ではバンドギャップがほとんど生じない。吸音材の効果は開口の幅に関わらず一定である。A 特性パワーレベルは開口があるときにそれぞれ $L=76.0, 76.6, 77.4, 78.0$ [dB]となった。開口がないときの $L=77.1$ [dB]と比べて、幅が小さい開口を設けると性能が向上している。図 1.4.11 に示した $d=0.4$ の半円の C 型円筒では開口によるピークの周波数がバンドギャップよりも高いため、 d を大きくすることで小さくなったバンドギャップの効果が d をさらに大きくしたことにより大きく現れている。しかし、吸音材の量が開口で切り欠かれているために少なく、高域の透過損失が他の吸音材を用いたモデルと比較して小さい。A 特性パワーレベルは $L=78.4$ [dB]となった。

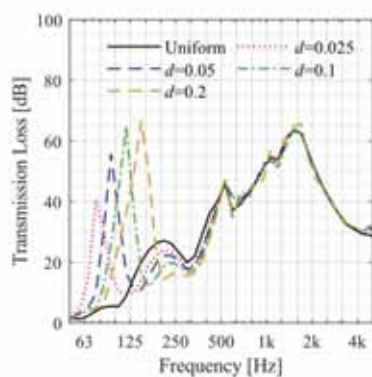


図 1.4.10 吸音材ありのときの C 型円筒の開口の幅による透過損失

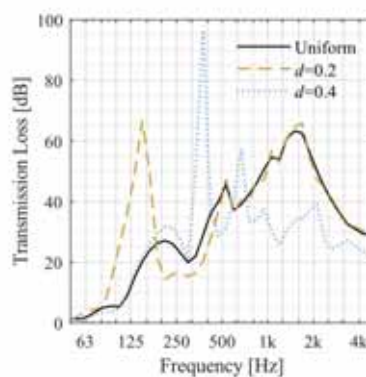


図 1.4.11 吸音材ありのときの開口の幅が広い C 型円筒の透過損失

C) 開口の角度の検討

吸音材で覆った場合も入射平面波に対する C 型円筒の開口の角度 θ に関して検討する。図 1.4.12 に開口なしかつ吸音材ありの円筒と、幅が $d=0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ [m]の開口を設けた C 型円筒を吸音材で覆い、角度 $\theta=0, \pi/4, \pi/2$ [rad]で配置したときの透過損失を示す。A 特性パワーレベルは表 1.4.2 のとおりである。 $d \leq 0.2$ のとき、バンドギャップは吸音材がないときと同様に

$\theta=\pi/2, \pi/4, 0$ の順に大きい。 $\theta=\pi/2$ のときは開口が大きいほどバンドギャップも大きくなり、さらにこのとき共鳴のピークと干渉する現象が起きていないのも吸音材がないときと同様である。 $d=0.4$ [m]のときはバンドギャップが $\theta=0, \pi/4$ では観測されるが $\theta=\pi/2$ ではバンドギャップが生じない。 $d\leq 0.2$ のとき共鳴によるピークは $\theta=\pi/2, \pi/4, 0$ の順にやや高域にある。開口の幅が $d=0.025, 0.05$ [m]のときは $\theta=\pi/2, d=0.1, 0.2$ [m]のときは $\theta=\pi/4, d=0.4$ [m]のときは $\theta=0$ で性能がよい。また開口の幅が $d\leq 0.5$ のときはすべての角度で開口のないモデルよりも A 特性パワーレベルは小さい。 d が小さいと性能がよい傾向があるが、吸音材の量も性能に関係しているといえるだろう。

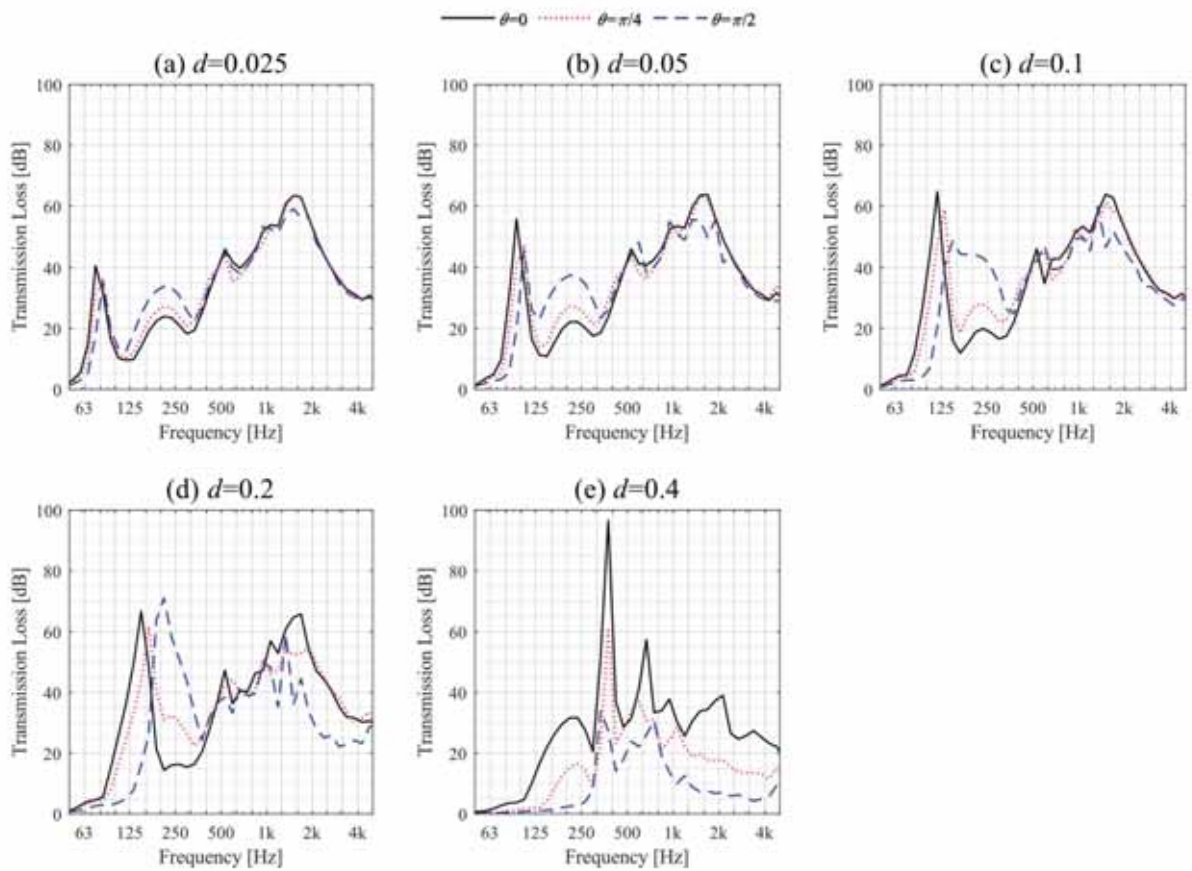


図 1.4.12 吸音材ありのときの開口の幅，角度による透過損失

表 1.4.2 吸音材で覆ったときの開口の幅，角度による A 特性パワーレベル

d [m]		0.025	0.05	0.1	0.2	0.4
L [dB]	$\theta=0$	76.0	76.6	77.4	78.0	78.4
	$\theta=\pi/4$	74.3	74.1	74.1	74.5	86.8
	$\theta=\pi/2$	72.8	73.6	76.0	79.3	94.5

1.5 孔を開けた周期構造遮音壁の数値計算例

1.5.1 孔を開けた円筒のモデル

本節では円筒に孔を開けたモデルの透過損失, A 特性パワーレベルを3次元で解析する。図 1.5.1 に本節で使用する円筒の形状の断面図, ならびに, パースを示す。内側の剛な円筒の各箇所の寸法は 1.2.2 節で設定したように厚さが $r=0.02$ [m], 内側の半径は $r_1=0.18$ [m], 外側の半径は $r_2=0.2$ [m] である。さらに円筒の円周上に半径が r_h [m] の孔を等間隔にあけた。最適な孔の半径と 1 周あたりの個数 n [個] を検討する。また, 孔は高さ方向には $h=0.1875$ [m] の間隔で並んでいる。図 1.5.2 のように高さ方向にも 1 周期分だけを取り出して単位構造とする。図 1.5.1 (b) には孔の開いた円筒の周りを厚さが $t=0.05$ [m], 流れ抵抗率は $R_f=10000$ [Pa s/m²] のグレーで示した吸音材で覆う。さらに図 1.5.1 (c) では円筒を覆った吸音材にも同様に半径が r_h [m] の孔を開けた。また, 図 1.5.3 のように入射軸に対して最も近傍の孔の角度を θ [rad] とする。

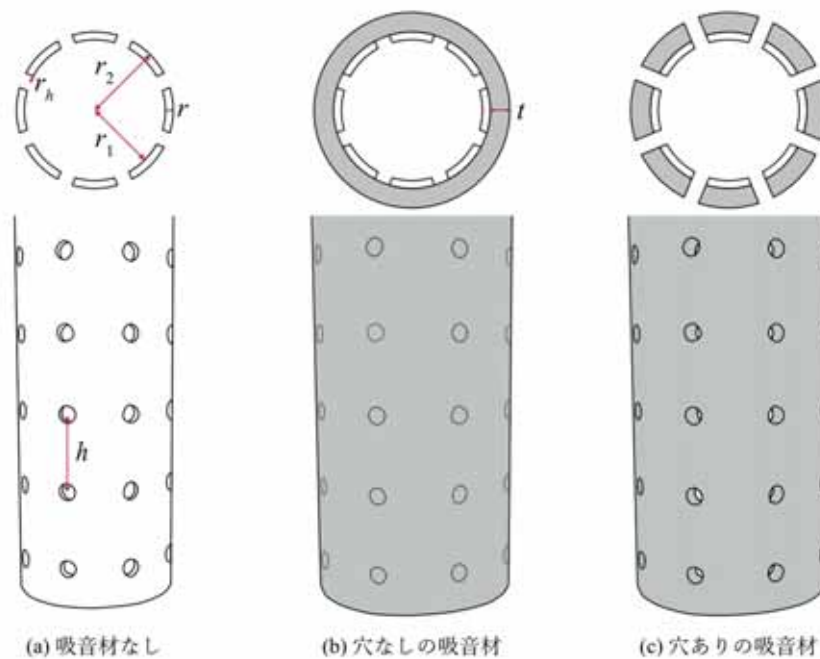


図 1.5.1 孔を開けた円筒の断面とパース

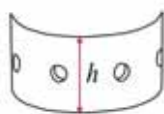


図 1.5.2 単位構造

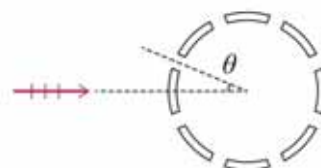


図 1.5.3 孔の角度

1.5.2 吸音材のない孔を開けた円筒

A) 孔の半径の検討

吸音材で円筒を覆わない場合の孔が無い基準モデルの円筒と角度 $\theta=0$ [rad] で半径が $r_h=0.01, 0.02, 0.04$ [m] の孔を円周上に 1 周あたり $n=8$ [個] 開けたモデルの透過損失を図 1.5.4 に示す。孔が無い円筒のとき、孔の半径が $r_h=0.01, 0.02$ [m] の孔を開けたときは構造の周期性により 265, 595 Hz 付近でバンドギャップが生じている。しかし、孔の半径が $r_h=0.04$ [m] まで大きくなると空気が円筒同士の隙間だけでなく孔の間も簡単に通過してしまうためソニッククリスタルとして機能せず、バンドギャップは生じない。孔を開けた円筒では $r_h=0.01$ [m] のときに 118 Hz, $r_h=0.02$ [m] のときに 210 Hz, $r_h=0.04$ [m] のときに 375 Hz でバンドギャップとは独立して新たな透過損失のピークが生じた。これにより孔の半径が大きくなるとこのピークは高周波数にシフトすることがわかる。 $r_h=0.02$ [m] のとき、バンドギャップと孔の共鳴によるピークが干渉し、効果が弱くなっている。吸音材を使用しない場合、A 特性パワーレベルは孔があるときにはそれぞれ $L=98.8, 99.7, 100.7$ [dB] であった。バンドギャップと干渉しない共鳴のピークを生じさせるために小さい孔を開ける方がよいということがわかるが、基準モデルの $L=98.7$ [dB] よりも性能は低い。

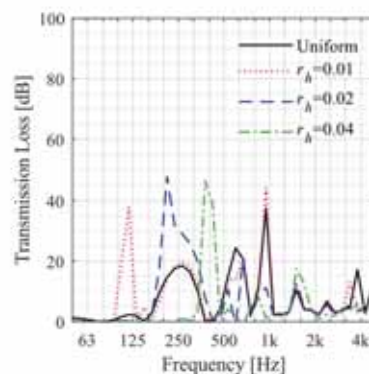


図 1.5.4 孔の半径による透過損失

B) 孔の個数の検討

半径が $r_h=0.01, 0.02$ [m] の孔を開けた円筒の透過損失について、1 周あたりの孔の個数を変更して解析を行った。図 1.5.5 は基準モデルと 1 周あたりの孔の個数を $n=2, 4, 6, 8$ [個] としたときの透過損失である。すべてのモデルで 265, 595 Hz 付近でバンドギャップが生じている。また孔を開けた円筒ではバンドギャップとは独立して新たな透過損失のピークが生じた。図より孔の個数が増えるとそのピークは高周波数にシフトすることがわかる。 $r_h=0.02$ [m] で $n=6, 8$ [個]

のときには共鳴とバンドギャップが干渉している。A 特性パワーレベルは孔を開けたときにそれぞれ $r_h=0.01$ [m] のとき $L=98.8$ dB, 98.9 dB, 98.8 dB, 98.8 dB, $r_h=0.02$ [m] のとき $L=98.7$ dB, 99.2 dB, 99.2 dB, 99.7 dB であった。円筒に孔を開けるだけでは基準モデルの $L=98.7$ [dB] よりも性能がよいものはない。

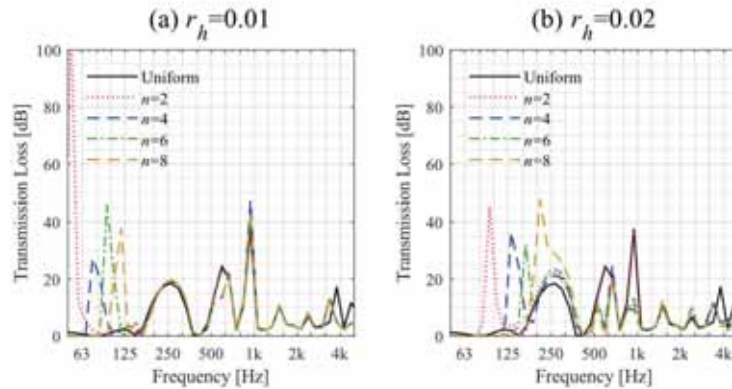


図 1.5.5 孔の数による透過損失

C) 共鳴周波数

孔を開けた円筒の共鳴周波数を検討する。孔を 3 次元のヘルムホルツ共鳴器の開口と同等に扱えば、式(1.4.4)より孔を開けた円筒の単位構造の共鳴周波数は次式のようにになる。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{nA}{V(l+\delta)}} \quad (1.5.1)$$

ただし、 n は単位構造あたりの孔の個数、 A はそれぞれの孔の面積、 V は単位構造の内側の容積である。式(1.5.1)より、図 1.5.1 (a)の形状の単位構造の共鳴周波数は次式で予測される。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{n\pi r_h^2}{\pi r_1^2 h (r + 0.8 \cdot 2r_h)}} \quad (1.5.2)$$

$$\Leftrightarrow f_0 = \frac{cr_h}{2\pi r_1} \sqrt{\frac{n}{h(r + 1.6r_h)}}$$

図 1.5.4, 1.5.5 で解析された $r_h=0.01, 0.02$ [m], $n=2, 4, 6, 8$ [個] のピーク周波数 f_s と式(1.5.2)で算出される $r_h=0.005$ [m] から 0.005 m 刻みの共鳴周波数 f_0 を図 1.5.6 にプロットし比較する。これらの周波数は f_s, f_0 とともに孔の総面積が増加すると共鳴周波数が高域にシフトし、よく一致している。

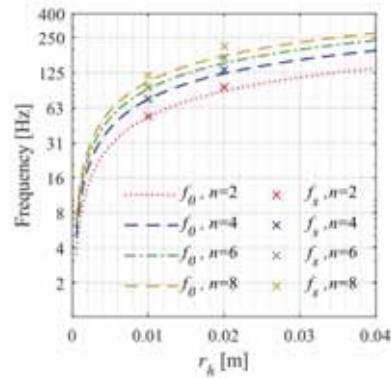


図 1.5.6 共鳴周波数

D) 孔の角度の検討

図 1.5.3 の入射軸に対する孔の角度 θ に関して調査する。図 1.5.7 に孔・吸音材のない剛な円筒と、吸音材のない円筒に角度 $\theta=0, \pi/4$ [rad] で半径が $r_h=0.02$ [m] の孔を $n=4$ [個] 開けた円筒の透過損失を示す。共鳴、バンドギャップの周波数位置や大きさは孔を開けたモデルのそれぞれで大きな違いがない。A 特性パワーレベルは孔を開けたときにそれぞれ $L=99.2$ dB, 98.8 dB であった。

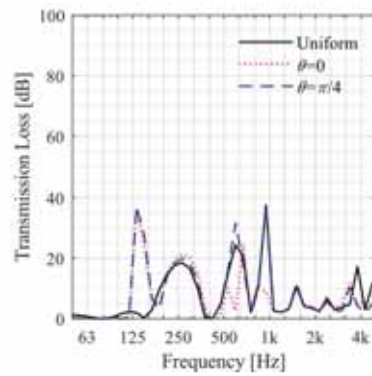


図 1.5.7 孔の角度による透過損失

1.5.3 吸音材で覆った孔を開けた円筒

A) 孔の半径の検討

孔が無い円筒と半径が $r_h=0.01, 0.02, 0.04$ [m]の孔を円周上に1周あたり $n=8$ [個]開けた円筒を孔の無い吸音材で覆った円筒の周期構造遮音壁の透過損失を図 1.5.8 (a)に示す。1.5.1 節と同様に、孔が無い円筒のとき、 $r_h=0.01, 0.02$ [m]の孔を開けた円筒のときはバンドギャップが生じているが、孔の半径が $r_h=0.04$ [m]まで大きくなるとバンドギャップは生じていない。孔を開けた円筒は、孔の無い吸音材で覆われることによりそれぞれの円筒は閉じられたものとなり、ヘルムホルツ共鳴器としての役割を果たさず、低域での透過損失のピークは現れない。しかし、特に 500 Hz よりも高周波数帯域に吸音材の効果が現れており、A 特性パワーレベルは孔があるときそれぞれ $L=74.6, 73.3, 73.9$ [dB]であった。すべての孔の大きさを円筒に孔が無いときの $L=77.1$ dB よりも A 特性パワーレベルは小さい。

吸音材にも孔を開けた場合の透過損失を図 1.5.8 (b)に示す。 $r_h=0.01, 0.02$ [m]の孔を開けた円筒のときはバンドギャップが生じるが、 $r_h=0.04$ [m]のときにはバンドギャップは生じていない。吸音材にも孔を開けると円筒は共鳴するが、吸音材の厚さにより孔のネックの実効長さが大きくなり、吸音材が無い場合と比較して共鳴周波数は低域にシフトする。円筒に孔を開けてかつ吸音材にも孔を開けたときの共鳴周波数は式(1.5.2)より次式のようになる。

$$f_0 = \frac{cr_h}{2\pi r_1} \sqrt{\frac{n}{h\{(r+t)+1.6r_h\}}} \quad (1.5.3)$$

式(1.5.3)よりヘルムホルツ共鳴器のネックが長くなるとヘルムホルツ共鳴周波数は低くなることが示された。 $r_h=0.02$ [m]のときは共鳴の周波数位置がバンドギャップの範囲に含まれている。孔を開けたとき、A 特性パワーレベルはそれぞれ 73.6, 77.0, 84.3 dB であった。吸音材の孔の有無で比較すると $r_h=0.01$ [m]のときには共鳴が効いていることから吸音材に孔を開けた方が、 $r_h=0.02$ [m]のときには低周波数帯域での透過損失の大きさの違いから吸音材に孔を開けない方が、 $r_h=0.04$ [m]のときにはバンドギャップの効果から吸音材に孔を開けない方がよいことがわかった。

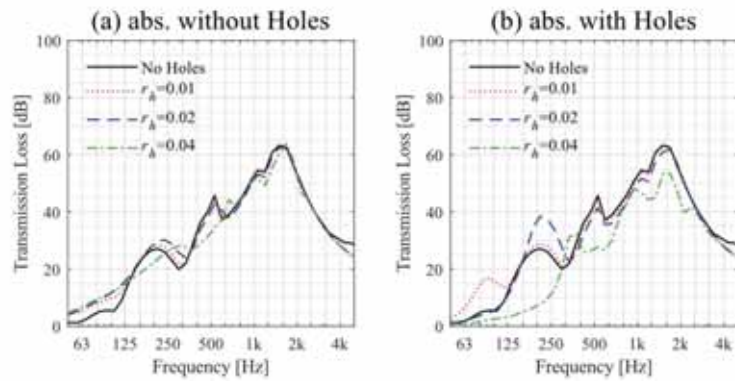


図 1.5.8 吸音材の孔の有無による透過損失

B) 孔の個数の検討

半径が $r_h=0.01, 0.02$ [m] の孔を開けた円筒を吸音材で覆った場合の透過損失について、1 周あたりの孔の個数を変更して解析を行った。図 1.5.9 は孔の無い円筒を吸音材で覆ったモデルと、それぞれ $r_h=0.01, 0.02$ [m] で 1 周あたり 2 個、4 個、6 個、8 個の孔を開けた円筒を孔のない/ある吸音材で覆った円筒の透過損失である。円筒に孔があるとき、A 特性パワーレベルは表 1.5.1 のようになる。すべてのモデルでバンドギャップが生じている。吸音材にも孔を開けたときに共鳴が起きているが、孔の 1 周あたりの個数が減ると円筒 1 本あたりの孔の個数も減り共鳴周波数は低域にシフトする。 $r_h=0.02$ [m] で $n=6, 8$ のときには共鳴の周波数位置がバンドギャップの範囲に含まれている。吸音材に孔を開けた場合には共鳴とバンドギャップの干渉から適切な孔の個数があるが、吸音材に孔が無い場合は共鳴せず、孔の個数が多いほどバンドギャップの効果がより大きく現れている。

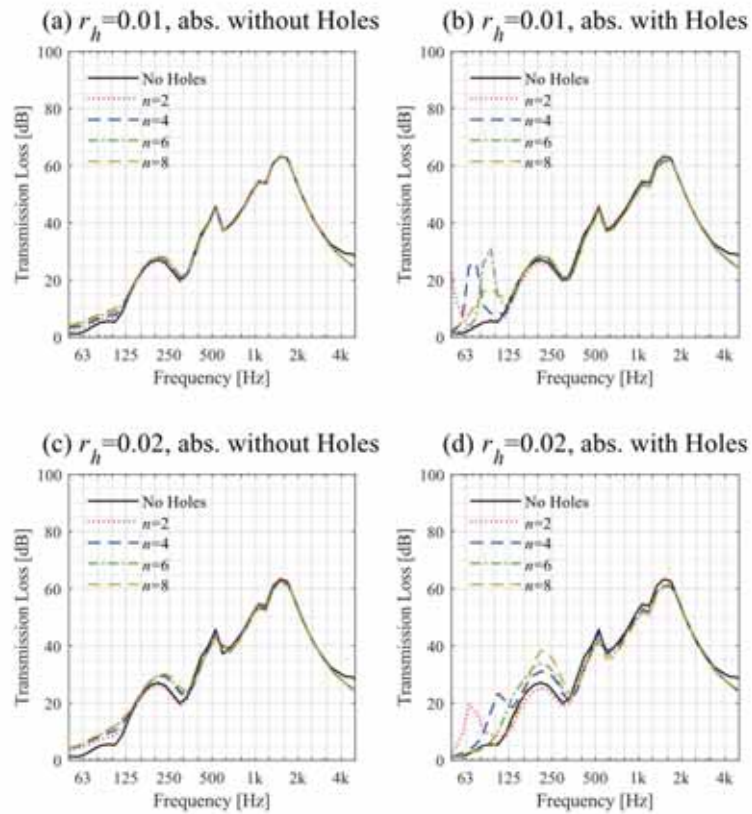


図 1.5.9 孔の半径，吸音材の孔の有無による透過損失

表 1.5.1 孔の半径，吸音材の孔の有無による A 特性パワーレベル

孔の個数		2	4	6	8
L [dB]	$r_h=0.01$ [m], 孔のない吸音材	76.5	75.7	75.0	74.6
	$r_h=0.01$ [m], 孔を開けた吸音材	77.1	77.1	75.5	75.0
	$r_h=0.02$ [m], 孔のない吸音材	75.8	74.2	73.6	73.3
	$r_h=0.02$ [m], 孔を開けた吸音材	76.0	74.1	75.5	77.0

1.6 まとめ

第1部では周期構造を用いた道路交通騒音遮音壁への応用の可能性を検討した。性能の評価にあたり、自動車走行騒音の周波数特性を作成し、遮音壁の透過損失を引き算したA特性パワーレベルを算出する方法を提案した。円筒にスリット状の開口を設けて断面をC型にしたり、円筒に孔を開けたりする形状の変更、また吸音材で円筒を覆うという材質の変更で性能向上を目指した。解析により、周期構造遮音壁には2つの現象があることが明らかになった。1つめは構造の周期性によりバンドギャップが生じること、2つめは円筒にスリット状の開口を設けC型の形状にしたことや、円筒に孔を開けたことにより低周波数帯域にヘルムホルツ共鳴が生じることである。しかしながら、剛な円筒に開口や孔を開けるだけでは性能は向上しない。高周波数帯域を抑制するためには、円筒を適当な流れ抵抗率の吸音材で覆うことで、共鳴、バンドギャップ、吸音の3つの効果を適切に利用することが重要であることがわかった。また、これらの開口や孔の最適な大きさ、個数を検討するパラメトリックスタディを行った。開口や孔の大きさによって共鳴とバンドギャップの効果が干渉するため、適切な幅の開口を設ける必要があるといえる。C型円筒の場合は開口の幅が小さいほど共鳴による透過損失のピークは低域にシフトし、バンドギャップとの干渉が起きないため、幅の狭い開口を設けるとよい。孔を開けた円筒でも孔の合計面積によって共鳴のピーク周波数が変わる。このことから、孔が小さいときには共鳴が効くことから吸音材にも孔を開けた方が、孔が大きいときには低周波数帯域での透過損失の大きさの違いから吸音材に孔を開けない方がよいことがわかった。

参考文献

- [1] Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. *Phys Rev Lett* 1987;58:2059–62.
- [2] John S. Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices. *Phys Rev Lett* 1987;58:2486–9.
- [3] Soukoulis CM. *Photonic Band Gaps and Localization*. New York: Plenum; 1993.
- [4] Taflove A. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3rd ed. London: Artech House; 2005.
- [5] Diest K. *Numerical Methods for Metamaterial Design*. Netherlands: Springer; 2013.
- [6] R. Martínez-Sala, J. Sancho, J. V. Sánchez, V. Gómez, J. Llinares, F. Meseguer, Sound attenuation by sculpture, *Nature* 1995;378:241
- [7] Chalmers L, Elford DP, Kusmartsev F V., Swallowe GM. Acoustic band gap formation in two-dimensional locally resonant sonic crystals comprised of helmholtz resonators. *Int J Mod Phys B* 2009;23:4234–43. <https://doi.org/10.1142/s0217979209063390>.
- [8] Romero-Garcia V, Castineira-Ibanez S, Sanchez-Perez J V., Garcia-Raffi LM. Design of wideband attenuation devices based on Sonic Crystals made of multi-phenomena scatterers. *Acoust* 2012 2012:543–8.
- [9] ASJ RTN-Model 2013, 日本音響学会誌 2014;70:172–230.
- [10] ASJ RTN-Model 2018, 日本音響学会誌 2019;75:188–250.
- [11] JIS C 1509-1:2005, 電気音響-サウンドレベルメータ (騒音計) .
- [12] 前川純一, 森本正之, 阪上公博, “建築・環境音響学第3版”, 共立出版 2011:121–7.

第 2 部

時間領域有限差分法による周期構造の斜入射音響透過損失の解析

2.1 はじめに

2.1.1 既往研究

電磁場のフォトニッククリスタル構造[1-5]に加えて、近年フォノンニッククリスタル、もしくは、ソニッククリスタルと呼ばれる波長よりも十分に小さい散乱体を弾性場や音場に周期的に配置した構造に関する研究も注目を集めている[6]。これらの周期構造の弾性的・音響的な特性として透過率やバンド構造が計算され、特に弾性波や音波のバンドギャップに着目した議論が行われてきた。このような研究は周期構造の最小単位である構造(単位構造)を解析対象としたものが多い。この単位構造の解析方法には、例えば、平面波展開(Plane Wave Expansion: PWE)法が挙げられる。PWE法を用いて、バルク波(弾性体内部を伝搬する波)のバンド構造が予測されたり[7, 8]、その後、バルク波に加えて、構造の表面に局在化しているサーフェス波(弾性体表面を伝搬する波)にも研究の対象が広げられたりしている[9-11]。PWE法以外の解析方法としては時間領域有限差分(Finite-Difference Time-Domain: FDTD)法が挙げられる。そこでは単位構造における周期性を考慮した境界条件を扱うためにBlochの理論が導入され、効率的な解析が実現されている[12]。複雑で大規模なシミュレーションを行う場合、PWE法では多数の波の足し合わせが必要となり、計算時間が膨大になってしまうが、波の足し合わせが必要ないFDTD法は効果的にこのような問題を解くことが可能である。さらに、PWE法では解くことができない固体、流体、真空の複合材料をFDTD法は扱うことができるため、対象材料の選択性が向上する。バンド構造は構成している材料の物理的なパラメータや構造の幾何的なパラメータに依存するが、基盤(散乱体を内包する基礎媒質)や散乱体の材料の密度、散乱体の寸法、充填率のようなパラメータに関する詳しい考察が行われている[13-15]。また、透過率の実験的な測定においてもバンドギャップの存在は確認されており、実験結果はFDTD法による解析結果とよく一致することが報告されている[16, 17]。近年、フォノンニッククリスタルやソニッククリスタルは音響カプラ[18]や導波路[18-24]の設計にも応用され、実用化が進んでいる。

これらのフォトニッククリスタル、フォノンニッククリスタル、ソニッククリスタルは、一般的には散乱体が2次元または3次元的に周期配置された構造であるが、電磁場ではより単純な1次元の周期構造についてMaxwell方程式を支配式としてFDTD法を用いて解析する方法も開発されている[25, 26]。周期構造に平面波が垂直に入射する場合は隣接するセルの対応する点間の位相

差がないため、単位構造の端と端をつなぐ連続境界を用いることで透過率を簡単に解析することができる。電磁場においては、この連続境界に加え、単位構造間の位相差を取り除くための補助変数を用いた領域変換を実装することで周期構造に平面波が斜めに入射するときの解析方法が提案され、分散性（計算誤差）や安定性（解の収束・発散）についても検討がなされている[4, 25, 26]。一方、弾性場においても同様の変換を適用した例があるが[12]、その解析精度などの詳細は明らかにされていない。

2.1.2 研究目的

本稿の目的は2次元音場において散乱体が1次的に周期配置された構造の解析方法を詳細に検討することである。図2.1.1のように同じ形状の散乱体が音場に x 軸方向に等間隔で無限個並んだ周期構造を想定する。このような音場に入射平面波が y 軸に関して θ [rad]の角度で伝搬するものとする。ここでは、この構造全体の特性を評価する方法を2通り考える。1つは周期構造全体を考慮して従来のFDTD法で評価する方法である。もう1つは電磁場用に開発された領域変換を音場に導入して単位構造を対象としたFDTD法で評価する方法である。後者では補助変数を用いた領域変換を音場の支配式である連続方程式と運動方程式に適用する。入射角、並びに、周期構造の幾何的なパラメータが音圧分布と透過損失に及ぼす影響を示し、両方法による計算結果を比較する。また、FDTD法の近似により計算過程には誤差が生じるが、変換された音場における入射波の入射角、散乱波の伝搬角ごとの分散性を詳細に分析するとともに、変換音場で時間離散化幅が満たすべき安定条件の導出を行う。

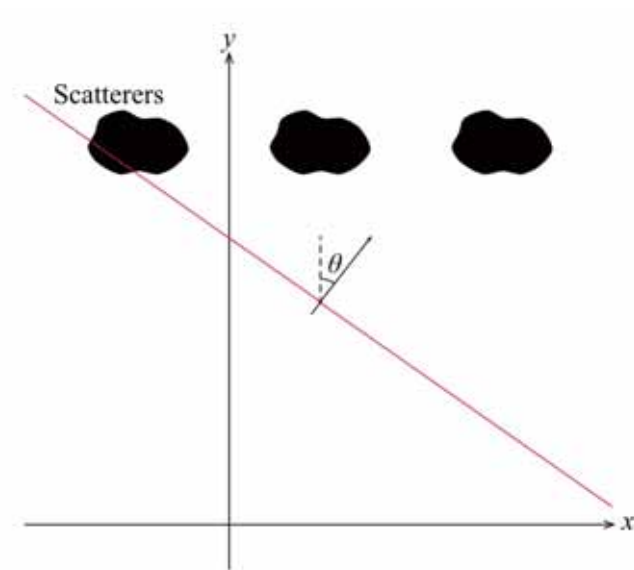


図 2.1.1 周期構造

2.2 通常音場の定式化

FDTD 法は、連続方程式と運動方程式を支配式として音波の解析を行う。本章では従来の FDTD 法での解析の方法[27]を紹介する。本稿ではこれ以降、このような従来の方法で解析が可能な音場を通常音場と呼ぶこととする。通常音場では離散化後、音圧と粒子速度を半時間ステップごとに交互に、かつ、逐次的に求めることができる。

2.2.1 支配式

2次元音場では、音圧を p とおき、 x 、 y 方向の粒子速度を v_x 、 v_y とすると、連続方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2.2.1)$$

ただし、 $\kappa = \rho c^2$ は体積弾性係数、 ρ は密度、 c は空気中の音速である。また、運動方程式は次式のように表される。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2.2)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2.3)$$

ここで、境界に Perfectly Matched Layer (PML)[28]を実装するため、音圧を次式のように x 方向成分と y 方向成分に分割する。

$$p = p_x + p_y \quad (2.2.4)$$

さらに、 x 、 y 方向の PML の減衰係数をそれぞれ η_{x0} 、 η_{y0} とすると式(2.2.1)～(2.2.3)は次式のようになる。

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\eta_{x0}}{\rho} p_x = -\kappa \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} p_y = -\kappa \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (2.2.6)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \eta_{x0} v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2.7)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \eta_{y0} v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2.8)$$

式(2.2.4)～(2.2.8)の計 5 式を通常音場の支配式とする。

2.2.2 離散化

ここで、これらの式を空間離散化幅が Δx , Δy , 時間離散化幅が Δt とした Yee セル[27]を用いて離散化する。x, y 方向に関して何番目の音圧参照点であるかを、空間ステップ i, j を用いて表すこととする。時間に関しても同様に、何番目の時間参照点であるかを、時間ステップ n を用いて表す。式(2.2.4)~(2.2.8)を離散化すると、次式のように表される。

$$p^n(i, j) = p_x^n(i, j) + p_y^n(i, j) \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_x^{n+1}(i, j) - p_x^n(i, j)}{\Delta t} + \frac{\eta_{x0}}{\rho} \frac{p_x^{n+1}(i, j) + p_x^n(i, j)}{2} \\ &= -\kappa \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)}{\Delta x} \\ &\Leftrightarrow p_x^{n+1}(i, j) \\ &= \frac{2\rho - \eta_{x0}\Delta t}{2\rho + \eta_{x0}\Delta t} p_x^n(i, j) - \frac{2\rho\kappa\Delta t}{\Delta x(2\rho + \eta_{x0}\Delta t)} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_y^{n+1}(i, j) - p_y^n(i, j)}{\Delta t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} \frac{p_y^{n+1}(i, j) + p_y^n(i, j)}{2} \\ &= -\kappa \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)}{\Delta y} \\ &\Leftrightarrow p_y^{n+1}(i, j) \\ &= \frac{2\rho - \eta_{y0}\Delta t}{2\rho + \eta_{y0}\Delta t} p_y^n(i, j) - \frac{2\rho\kappa\Delta t}{\Delta y(2\rho + \eta_{y0}\Delta t)} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n-0.5}(i+0.5, j)}{\Delta t} + \eta_{x0} \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) + v_x^{n-0.5}(i+0.5, j)}{2} \\ &= -\frac{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)}{\Delta x} \\ &\Leftrightarrow v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) \\ &= \frac{2\rho - \eta_{x0}\Delta t}{2\rho + \eta_{x0}\Delta t} v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) - \frac{2\Delta t}{\Delta x(2\rho + \eta_{x0}\Delta t)} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{\Delta t} + \eta_{y0} \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) + v_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{2} \\
&= - \frac{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)}{\Delta y} \\
&\leftrightarrow v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) \\
&= \frac{2\rho - \eta_{y0}\Delta t}{2\rho + \eta_{y0}\Delta t} v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{2\Delta t}{\Delta y(2\rho + \eta_{y0}\Delta t)} \{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)\} \tag{2.2.13}
\end{aligned}$$

ここで、 $\eta_x = \eta_{x0}\Delta t/2\rho$ 、 $\eta_y = \eta_{y0}\Delta t/2\rho$ とおくと、式(2.2.10)～(2.2.13)は次式のようになる。

$$p_x^{n+1}(i, j) = \frac{1-\eta_x}{1+\eta_x} p_x^n(i, j) - \frac{\kappa\Delta t}{(1+\eta_x)\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \tag{2.2.14}$$

$$p_y^{n+1}(i, j) = \frac{1-\eta_y}{1+\eta_y} p_y^n(i, j) - \frac{\kappa\Delta t}{(1+\eta_y)\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \tag{2.2.15}$$

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = \frac{1-\eta_x}{1+\eta_x} v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) - \frac{\Delta t}{(1+\eta_x)\rho\Delta x} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \tag{2.2.16}$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = \frac{1-\eta_y}{1+\eta_y} v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{\Delta t}{(1+\eta_y)\rho\Delta y} \{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)\} \tag{2.2.17}$$

$n=0$ を初期時刻として表のように初期条件（表中○印）を与え、 $n=0.5$ 以降は表 2.2.1 の順序で音圧と粒子速度のそれぞれの値を交互に求める。離散化幅については 2.4 章で詳しく議論するが、空間離散化幅は $\Delta x = \Delta y = 5.0 \times 10^{-2}$ [m]、時間離散化幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ [s] とする。

表 2.2.1 更新の順序

	p	p_x	p_y	v_x	v_y
$n=0$	○	○	○		
$n=0.5$				①	②
$n=1$	⑤	③	④		
$n=1.5$				⑥	⑦
$n=2$	⑩	⑧	⑨		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2.2.3 音源

音源波形として与えるガウシアンパルスの時間関数 $F(t)$ は次式で表される。

$$F(t) = me^{-C(t-t_0)^2} \quad (2.2.18)$$

ただし、 $m=1.0$ [m²/s] はガウシアンパルスの最大値、 $C=2.0 \times 10^6$ はガウシアンパルスの急峻さを表す係数、 $t=3.0 \times 10^{-3}$ [s] はガウシアンパルスの中心時刻である。式(2.2.18)を離散化すると次式のようなになる。

$$F(n) = me^{-C(n\Delta t - t_0)^2} \quad (2.2.19)$$

式(2.2.19)を加振したいすべての点における音圧の式(2.2.14)、(2.2.15)に $1/2$ ずつ与えて加振すると次式のようなになる。

$$p_x^{n+1}(i, j) = \frac{1-\eta_x}{1+\eta_x} p_x^n(i, j) - \frac{\kappa\Delta t}{(1+\eta_x)\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} + \frac{F(n)}{2} \quad (2.2.20)$$

$$p_y^{n+1}(i, j) = \frac{1-\eta_y}{1+\eta_y} p_y^n(i, j) - \frac{\kappa\Delta t}{(1+\eta_y)\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} + \frac{F(n)}{2} \quad (2.2.21)$$

2.2.4 PMLの減衰係数

2次元音場での式(2.2.14)~(2.2.17)において最適な減衰係数 η_x 、 η_y を算出しなければならない。 η_x の分布は空気との境界から滑らかに増大する次のような関数で表現される[29]。

$$\eta_x(x) = \eta_{x\max} \left(\frac{x}{N\Delta x} \right)^\tau \quad (2.2.22)$$

式(2.2.22)はPMLの層数 N 、減衰係数の最大値 $\eta_{x\max}$ 、テーパ乗数 τ の値により決定される。 η_y も η_x と同様に定義し次式で表す。

$$\eta_y(y) = \eta_{y\max} \left(\frac{y}{N\Delta y} \right)^\tau \quad (2.2.23)$$

PML端部の境界は剛とする。 $\eta_{x\max} = \eta_{y\max} = \eta_{\max}$ [-]とおく。3次元音場では τ の最適値は $\tau=4$ であるという知見が得られている[30]。 N は多いほどよいが、 $\Delta x = \Delta y = 5.0 \times 10^{-2}$ [m]のときは $N=32$ [層]でPMLの性能が収束するため、 $N=32$ を最適値とする。ここでは、2次元音場でこれらの N 、 τ を用いた際の η_{\max} の最適値を求めることを目的とする。

解析対象の音場として、図2.2.1に示す2つの正方形を考える。図2.2.1 (a)の解析領域の一辺の長さは $x_{\max} = y_{\max} = 5.0$ [m]、図2.2.1 (b)の解析領域は図2.2.1 (a)の正方形と比べて十分に大きい $x_{\max} = y_{\max} = 20$ [m]とした。音源、受音点はともに正方形の中心に配置する。

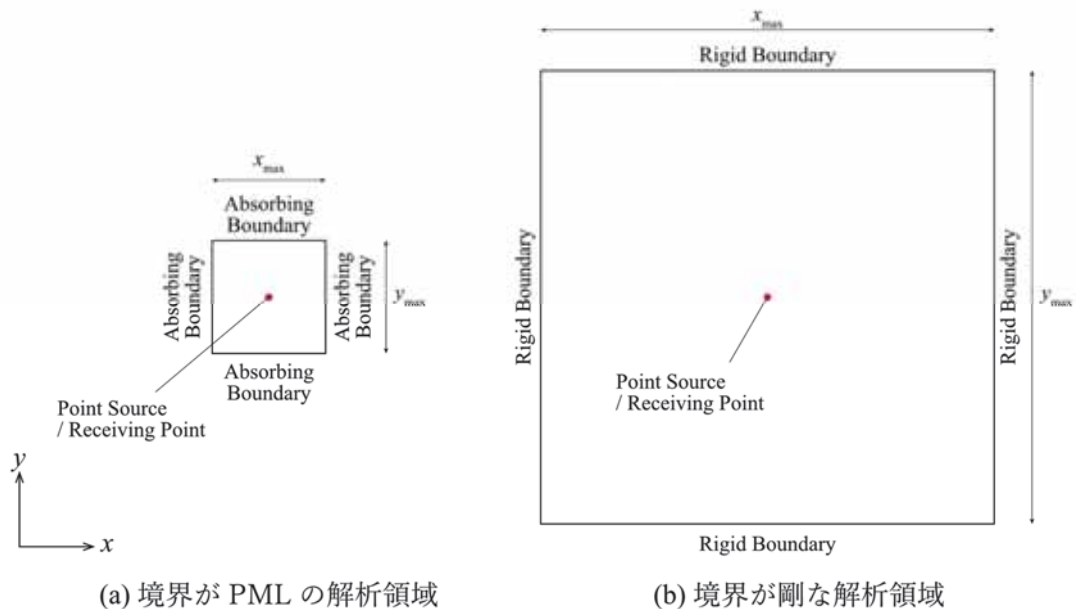


図 2.2.1 解析領域

その他の条件は $\rho=1.2$ [kg/m³], $c=340$ [m/s]とし, 空間離散化幅, 時間離散化幅については 2.2.2 節で述べたとおり, それぞれ $\Delta x=\Delta y=5.0\times 10^{-2}$ [m], $\Delta t=1.0\times 10^{-4}$ [s]とし, 解析時間は $t_{\max}=0.05$ [s]と設定する。図 2.2.1 (a)の解析領域を対象とする際, その外側には PML (図中では Absorbing Boundary と表現した) を設置する。図 2.2.1 (b)の解析領域を対象とする際, 周囲の境界条件は剛として, 受音点での音圧 p [Pa]の時間応答を求める。図 2.2.1 (b)の解析領域を対象とするとき, 解析時間内に受音点には境界からの反射波は到達しないため, 図 2.2.1 (b)の解析領域を対象とした場合の音圧を真値とする。図 2.2.1 (a)の解析領域の音圧と真値との差の最大値が最小となる有効数字 3 桁までの η_{\max} [-]を最適値として採用する。

はじめに, $\eta_{\max}=0.0, 1.0, 10$ の 3 通りで検討した。図 2.2.2 に η_{\max} ごとの受音点での音圧時間応答を示した。図 2.2.2 (a)は音圧が $-6.0\times 10^{-3}\sim 4.0\times 10^{-3}$ Pa の全体図である。赤の点線で示した $\eta_{\max}=0.0$ のときの音圧は 0.02 s 以降多くの反射波がみられるが, 真値と $\eta_{\max}=1.0, 10$ は結果が概ね一致している。図 2.2.2 (b)は $-1.0\times 10^{-5}\sim 1.0\times 10^{-5}$ Pa の部分詳細図である。前述の通り, 図より黒の実線で示した解析領域を広くとった場合は, 解析時間内に反射波が受音点に到達していないことがわかる。それぞれ青の破線, 緑の一点鎖線で示した $\eta_{\max}=1.0, 10$ のときは反射波のために誤差が生じている。これは式(2.2.22), (2.2.23)の η の変化が急激なため, 離散化した際の不連続性が増したことが原因であると考えられる。 $\eta_{\max}=1.0$ の方が $\eta_{\max}=10$ よりも真値との差が小さくなっており, $\eta_{\max}=1.0$ 付近が適切な値であると予想される。

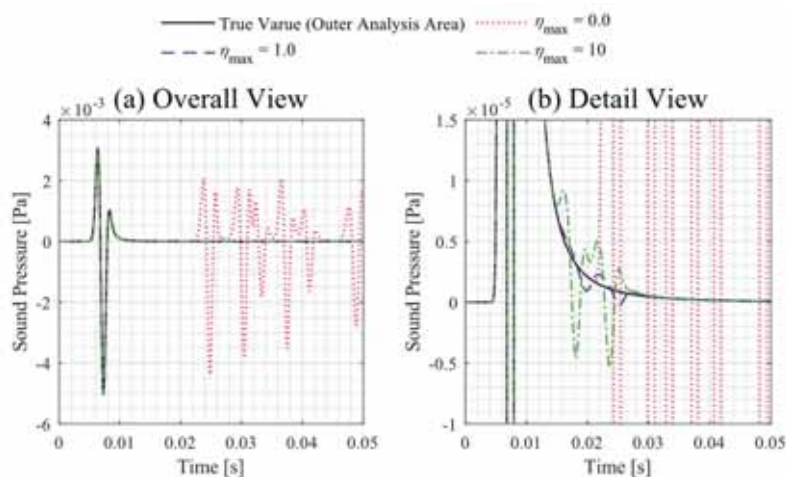


図 2.2.2 減衰係数最大値ごとの受音点での音圧時間応答 (a) 全体 (b) 詳細

さらに, より精度の高い η_{\max} を決める必要がある。図 2.2.3 は受音点での音圧時間応答, 図 2.2.4 は受音点での音圧の真値との誤差の最大値の推移を減衰係数最大値ごとに示したものである。

$\eta_{\max}=1.0$ の前後で有効数字 1 桁での最適値を決定するために、 $\eta_{\max}=0.1\sim 0.9$ で 0.1 刻みと、 $\eta_{\max}=1\sim 9$ で 1 刻みの p を計算した。このうち真値との誤差が最も小さかったのは $\eta_{\max}=0.3$ であった。図 2.2.3 (a)と図 2.2.4 (a)には $\eta_{\max}=0.1\sim 0.5$ のときの結果を記載している。有効数字 1 桁まででは、設定した η_{\max} ごとに収束がばらついているため、有効数字 2 桁での最適値も求める必要がある。次に $\eta_{\max}=0.2\sim 0.4$ で 0.01 刻みのものを計算した。 $\eta_{\max}=0.28$ で真値との誤差が最小となった。図 2.2.3 (b)と図 2.2.4 (b)は $\eta_{\max}=0.26\sim 0.30$ のときの結果である。有効数字 1 桁の場合の誤差と比べると収束のばらつきの程度は小さくなっているが、さらに有効数字 3 桁での最適値も求める。 $\eta_{\max}=0.27\sim 0.29$ で 0.001 刻みの p を計算した。図 2.2.3 (c)と図 2.2.4 (c)に $\eta_{\max}=0.278\sim 0.282$ のときの結果を示した。図より $\eta_{\max}=0.280$ が最適であることが確認された。有効数字 3 桁での各結果において波形の大きな違いがみられないため、この $\eta_{\max}=0.280$ を減衰係数最大値とする。

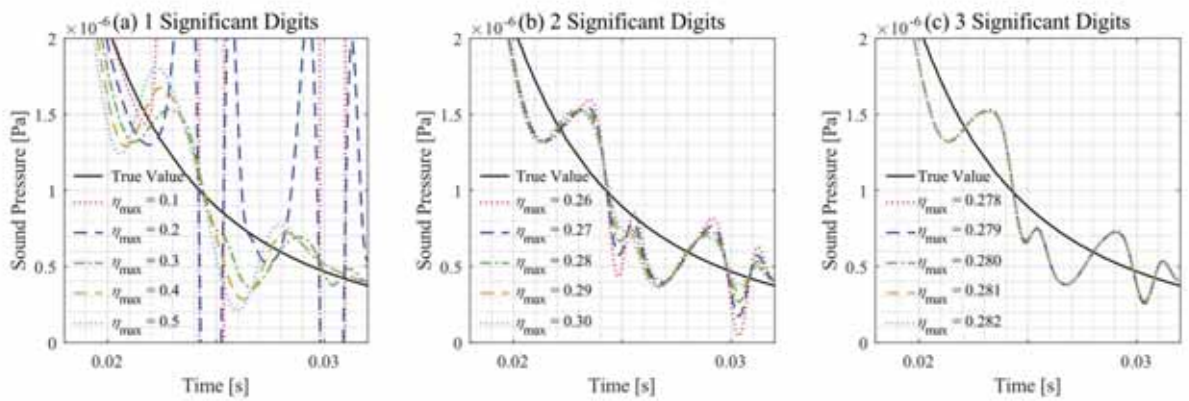


図 2.2.3 減衰係数最大値ごとの受信点での音圧時間応答

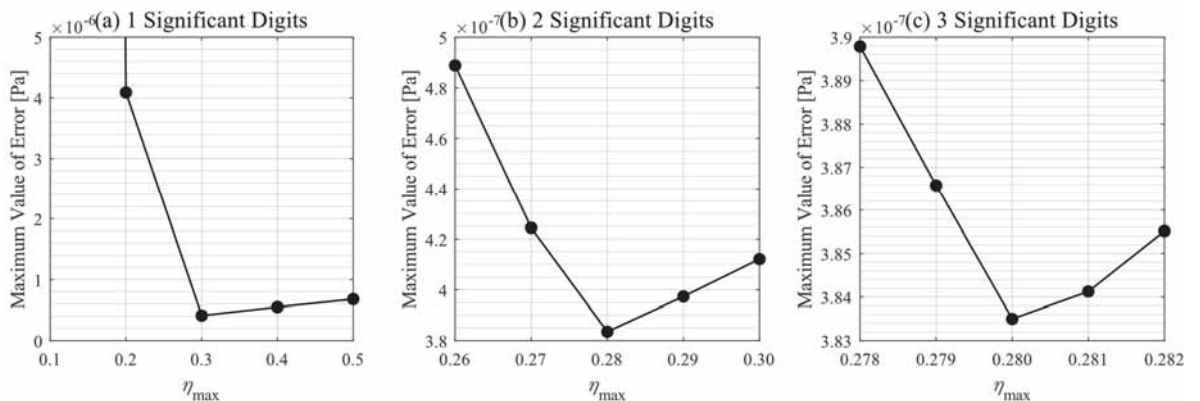


図 2.2.4 減衰係数最大値ごとの受信点での音圧の真値との差のピーク値の推移

2.3 通常音場の数値計算例

本章では通常音場で周期構造の評価を行う。通常音場において周期構造に平面波が斜入射するときのモデルの作成方法と評価方法を検討する。

2.3.1 通常音場の解析領域

散乱体のある場に音源を入力すると、直接波と散乱体からの反射波の両方が観測される。すなわち、周期構造を解析するときには構造に波が入射した後、評価対象とするひとつの散乱体の周囲に配置された他の散乱体からの反射波の影響も計算に加えなければならない。対象の散乱体から遠くに配置された散乱体からの反射波を解析結果に考慮するためには、通常音場に無限個に近い数の散乱体を並べ非常に広い解析範囲を設定する必要がある。

図 2.3.1 に示すように解析領域を十分に広くとり、領域内の y 方向中央部に一辺の長さが a [m] の正方形の散乱体を x 方向に n_x [個] だけ $x_{\max 0}$ [m] 間隔で並べた。図の中央部のグレーで囲んだ散乱体とその周辺の計算結果を評価対象として取り出す。この対象とする領域の寸法は $x_{\max 0}=y_{\max 0}=5$ [m] とし、評価対象領域の中心に散乱体が配置されている。散乱体の個数が n_x [個] のとき、解析領域の x 方向の寸法は $x_{\max}=x_{\max 0} \cdot n_x$ [m] となる。 y 方向にも n_x [個] の領域を並べることとすると解析領域の y 方向の寸法は $y_{\max}=y_{\max 0} \cdot n_x$ [m] となる。境界には解析領域の外側に PML を実装した。音源については、図の赤い実線のように x 軸に関して θ [rad] の位置に多くの点音源を並べ平面波入力を模擬する。

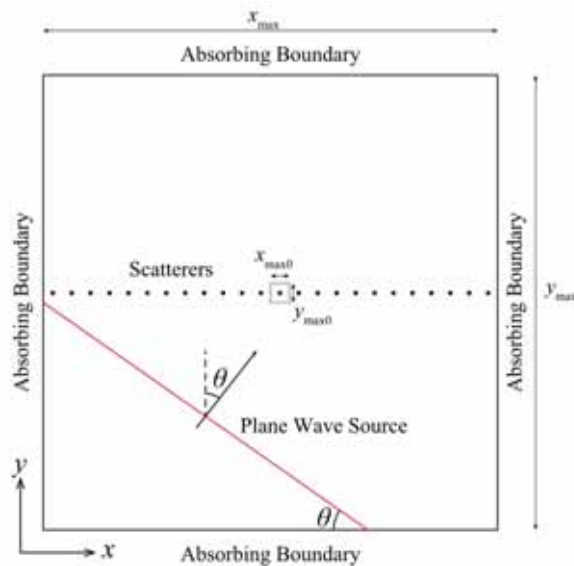


図 2.3.1 通常音場の解析領域

この解析領域において周囲の PML からの反射波が評価対象領域に届くまでの時間のものを正確な結果と考える。ここで、反射波が評価対象領域に届くまでの時間を算出する。例として図 2.3.2 のように $n_x=16$ [個]の領域を考える。このとき、 $x_{\max}=y_{\max}=80$ [m]となる。評価対象領域は左から $n_x/2+1=9$ 番目、下からも同様に 9 番目に位置する領域とし、またこの領域の下端、上端の y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とする。音源の入射角は一例として $\theta=\pi/4$ とする。 y_1 を通り x 軸に対して正、 y 軸に対して負の方向に $\pi/4$ の角度の直線に最も近い離散化された点音源の集合で平面波を近似する。さらに、評価対象領域内の音源から最も遠い $y=y_2$ 上の右端の点を受音点と定義する。図 2.3.3 は音場に散乱体がないときのこの受音点における音圧 p の時間応答である。時刻 $t=0.1000$ [s]で入射波の直接波の音圧が最大となっていることが見て取れる。ここで、図 2.3.2 に水色で示した t_1 を $t_1=0.1000$ [s]とおくと、入射平面波の中心 A から受音点 B に入射波が到達するまでの時間は t_1 [s]となる。また、AB 間の距離 d [m]は次式で表される。

$$d = x_{\max 0} \cdot \frac{n_x}{4} \cdot \frac{1}{\cos(\pi/4)} + x_{\max 0} \cdot \frac{1}{\cos(\pi/4)}$$

$$\Leftrightarrow d = x_{\max 0} \cdot \left(\frac{n_x}{4} + 1 \right) \cdot \sqrt{2} \quad (2.3.1)$$

図 2.3.2 に緑色で示した $x_{\max 0}$ [m]だけ進むのにかかる時間 $t_{\max 0}$ [s]を t_1 と d を用いて表すと次式のようになる。

$$t_{\max 0} = \frac{t_1}{d} \quad (2.3.2)$$

式(2.3.2)より $n_x=16$ のとき、 $t_{\max 0}=0.0141$ である。以上より、図 2.3.2 に黄色で示した散乱体の個数が n_x のとき周囲の PML からの反射波が評価対象領域に届くまでの時間、すなわち解析時間 t_{\max} は次式で予測される。

$$t_{\max} = t_{\max 0} \cdot \frac{n_x}{2} \quad (2.3.3)$$

表 2.3.1 は n_x を 16 から倍ずつ増加させたときの n_x ごとの式(2.3.3)を用いて予測される t_{\max} である。

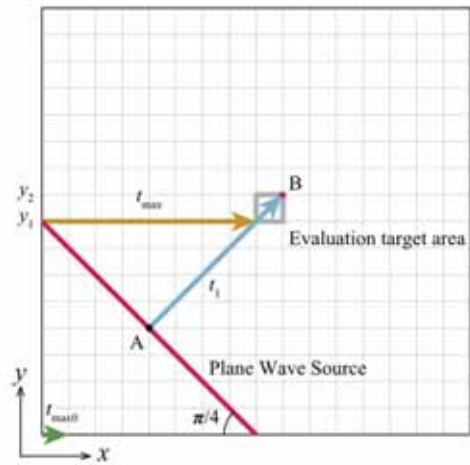


図 2.3.2 反射波が評価対象領域に到達するまでの時間

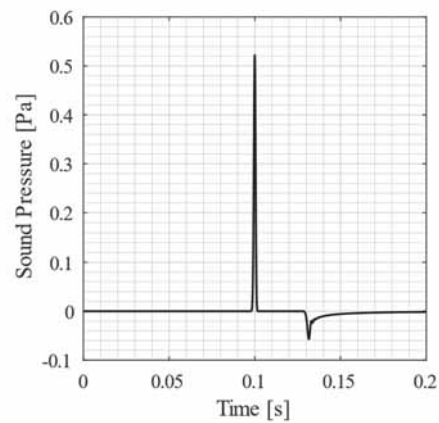


図 2.3.3 80 m 四方の通常音場に散乱体がないときの音圧の時間応答

表 2.3.1 散乱体の個数ごとの反射波が評価対象領域に到達するまでの時間

n_x [個]	16	32	64	128	256	512
t_{\max} [s]	0.1128	0.2256	0.4512	0.9024	1.8048	3.6096

なお、 $0 \leq \theta < \pi/2$ の任意の入射角で t_{\max} の値は一致する。以上の議論より、通常音場での解析時間はそれぞれの n_x に対する t_{\max} を上限とする。

2.3.2 透過損失

さて、通常音場に複数個並べる散乱体の数は多いほど t_{\max} が大きくなるため周期構造の再現性は高くなる一方で計算には膨大な時間がかかる。解の正確さと計算時間から通常音場として定義するにあたって周波数領域で透過損失を計算して妥当な散乱体の個数を決める。

透過損失は以下の手順で求める。はじめに、 y 方向の透過エネルギーを算出する。点 (x, y) における Δt [s]間の透過エネルギー E_T は次式で表される。

$$E_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ p(x, y, \omega) \cdot v_y^*(x, y, \omega) \right\} \cdot \Delta t \quad (2.3.4)$$

ここで、 $\operatorname{Re}\{\}$ は実部を表し、 $*$ は複素共役、 ω は角周波数である。2.2.2 節の音圧・粒子速度は時間領域で計算されているが、透過損失は周波数領域で求める。音圧を離散的にフーリエ逆変換すると次式のようになる。

$$p(x, y, \omega) = \int_0^{t_{\max}} p(x, y, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.3.5)$$

粒子速度は音圧から空間について $\Delta y/2$ だけずらして定義されているため、次式のように平均をとりフーリエ逆変換を行う。

$$v_y(x, y, \omega) = \int_0^{t_{\max}} \frac{v_y(x, y - \Delta y/2, t) + v_y(x, y + \Delta y/2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \quad (2.3.6)$$

式(2.3.5)、(2.3.6)を式(2.3.4)に代入すると E_T は次式で表すことができる。

$$E_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{t_{\max}} p(x, y, t) e^{i\omega t} dt \cdot \left(\int_0^{t_{\max}} \frac{v_y(x, y - \Delta y/2, t) + v_y(x, y + \Delta y/2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \right)^* \right\} \cdot \Delta t \quad (2.3.7)$$

図 2.3.2 の評価対象領域の上端において x 方向に並べた $i_{\max} = x_{\max} / \Delta x = 100$ [個]の参照点を取り、それぞれ点 $(i\Delta x, y)$ で表される 100 ケ所の透過エネルギーを合計すると次式のようになる。

$$E_{T_{\text{total}}} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} E_T(i) \quad (2.3.8)$$

透過エネルギーレベル L_T は次式のようになる。

$$L_T = 10 \log_{10} E_{T_{\text{total}}} \quad (2.3.9)$$

散乱体なし、ありのときの透過エネルギーレベルをそれぞれ L_{T0} 、 L_{T1} とすると透過損失 TL は次式のようになる。

$$TL = L_{T0} - L_{T1} \quad (2.3.10)$$

このとき、周波数はサンプリング点数 $n_{\max} = t_{\max} / \Delta t$ [個]、サンプリング周波数 $f_s = 1 / \Delta t$ [Hz]、を用いて、周波数分解能 $\Delta f = f_s / n_{\max}$ [Hz]、最大周波数 $f_{\max} = f_s / 2$ [Hz] ように離散的に決定される。ただし、解析対象上限周波数 $f_{\max} = 340$ [Hz] までの透過損失を考えることとする。

図 2.3.4 は平面波の入射角 θ [rad], 散乱体の一辺の長さ a [m], 散乱体の個数 n_x [個] を変数として求めた透過損失である。各変数は $\theta=\pi/6, \pi/4, \pi/3, a=0.5, 2.5, 4.5$ と設定した。 n_x は表 2.3.1 のとおりであるが $n_x=512$ [個] のときは計算時間が膨大であったため計算不可と判断し、代わりに $n_x=400$ [個] のときの結果を示している。ただしこのとき、解析時間は $t_{\max}=2.8200$ [s] である。

図 2.3.4 (a)~(c) より $\theta=\pi/6$ のとき、 $n_x=16, 32, 64$ で計算結果がばらついている。これは評価対象領域を直接波が通過後、反射波が到達するまでの時間が短すぎるためであると考えられる。 $n_x=128, 256, 400$ の結果はよく一致しているが、 $a=0.5$ かつ $n_x=128$ のとき透過損失が全周波数帯域で 0 dB のまま変化が見られない。よって n_x は 256 以上に設定することが望ましい。図 2.3.4 (d)~(f) より $\theta=\pi/4$ のとき、 $n_x=16, 32, 64, 128$ で結果がばらついており、 $\theta=\pi/6$ と比べて結果が安定するまで長い時間が必要であることがわかる。これは入射波の midpoint から評価対象領域内の音源から最も遠い受音点までの距離が θ の増加により長くなるためである。 $n_x=256, 400$ の結果はよく一致しており、 n_x は 256 以上に設定するとよい。図 2.3.4 (g)~(i) より $\theta=\pi/3$ のとき、 $n_x=16$ で他の n_x と透過損失が明らかに違い、また $a=4.5$ かつ $n_x=256$ の低域において結果が滑らかな曲線になっていないが、これは $\theta=\pi/4$ の考察と同様に入射波からの距離が遠いからである。 $n_x=400$ にすると計算結果は安定する。以上より、 $n_x=400$ を妥当な散乱体の個数とする。このとき、周波数についてサンプリング点数は $n_{\max}=t_{\max}/\Delta t=28000$ [個]、サンプリング周波数は $f_s=1/\Delta t=10000$ [Hz] より、周波数分解能は $\Delta f=f_s/n_{\max}=0.357$ [Hz] である。

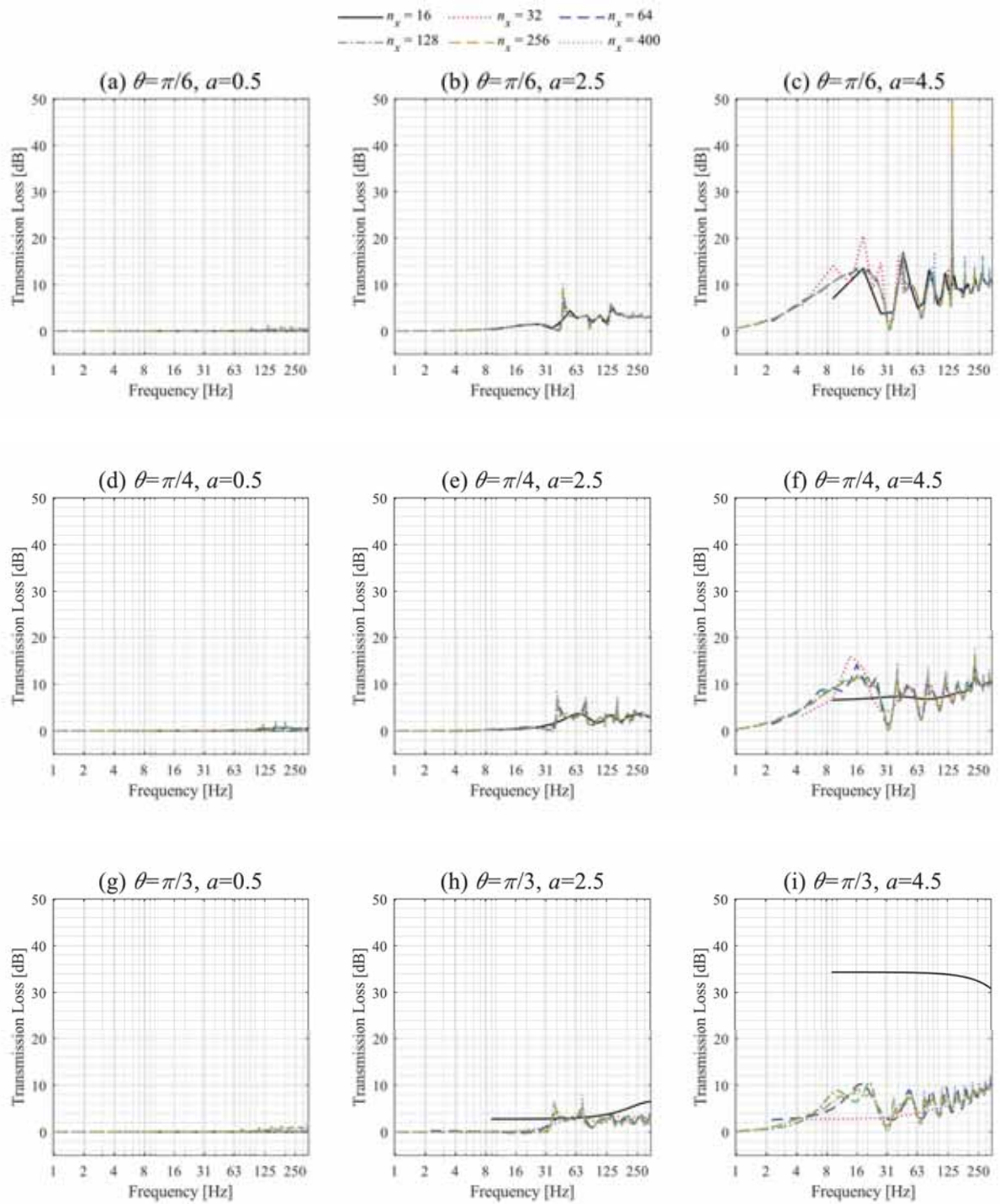


図 2.3.4 入射角，散乱体の寸法ごとの透過損失

2.3.3 垂直入射の透過損失

斜入射のときは散乱体を解析領域に数多く配置する必要があったが、垂直入射，すなわち $\theta=0$ [rad] の場合は簡単な解析領域の設定が可能である。図 2.3.5 のように評価対象領域の中心に散乱体を配置し，上下の境界には PML を実装，また左右の境界は剛とする。垂直入射の場合，剛境界は連続境界と同じ条件になり，評価対象領域のモデル（単位構造）だけで周期構造を簡単に表すことができる。音源は領域の下端に多くの点音源を並べ垂直な平面波の入力を模擬する。図 2.3.6 に $a=0.5, 2.5, 4.5$ [m] としたときの透過損失をそれぞれ示す。

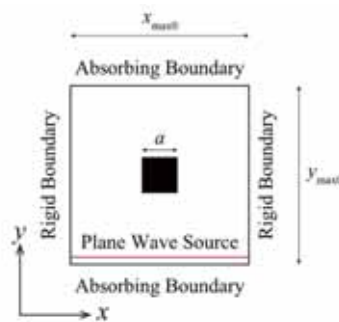


図 2.3.5 垂直入射の解析領域

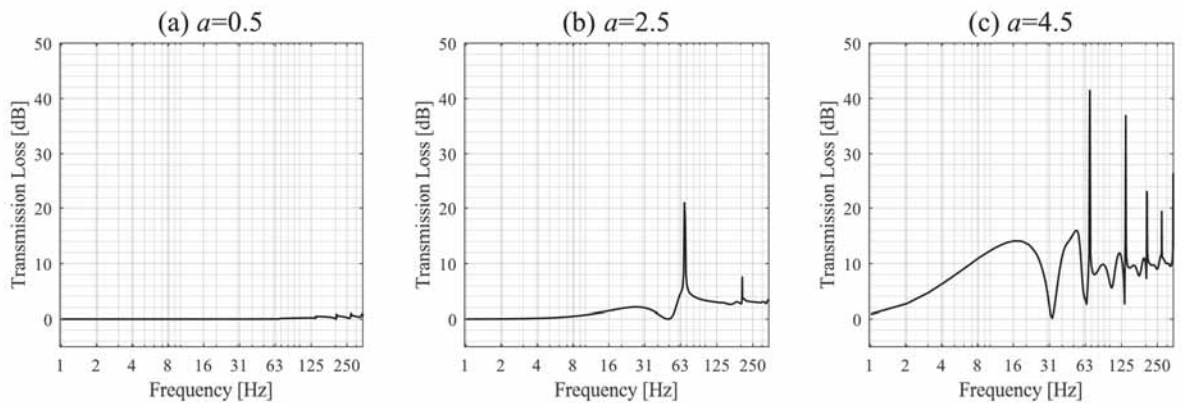


図 2.3.6 垂直入射のときの散乱体の寸法ごとの透過損失

2.4 通常音場の分散性解析と安定性解析

通常音場において入射波は理論的には四方八方に均等の音速で進む。しかしながら、FDTD法は微分係数を差分商で近似して数値解を得る方法であるため、空間と時間の離散化より必ず計算誤差が生じる。空間離散化幅、時間離散化幅、空間離散化幅と波長の比、伝搬角に依存する誤差が生じる性質を数値分散性と呼ぶ。本章では、通常音場に平面波を入力した際の伝搬角による分散性、解が発散しないための Δt の CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 安定条件を解析した。ここでは要点のみを示す。

2.4.1 振幅の増幅率を用いた数値的な安定性解析

差分スキームに平面波を入力し、応答の振幅絶対値が時間進行によりどのように変化するかを観察する。計算を簡単にするために PML を実装しない通常音場の支配式(2.2.1)~(2.2.3)を離散化すると次のようになる。

$$p^n(i, j) = p^n(i, j) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \quad (2.4.1)$$

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \quad (2.4.2)$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)\} \quad (2.4.3)$$

式(2.4.1)~(2.4.3)の通常音場の差分スキームに平面波を入力する。伝搬角を α 、波数を $k_0 = \frac{\omega}{c}$ とお

くと x, y 方向成分は $k_{x0} = \frac{\omega}{c} \sin \alpha$, $k_{y0} = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$ のようにそれぞれ表される。空間移行を $e^{ik_{x0}x}$, $e^{ik_{y0}y}$, 複素振幅の増幅率を ζ_0 とするとグリッド点 $(i\Delta x, j\Delta y)$ において p_0, v_{x0}, v_{y0} を初期値とした次のような振幅が 1 である平面波の関係を仮定できる。

$$p^n(i, j) = p_0 e^{ik_{x0}i\Delta x} e^{ik_{y0}j\Delta y} \zeta_0^n \quad (2.4.4)$$

$$v_x^n(i+0.5, j) = v_{x0} e^{ik_{x0}(i+0.5)\Delta x} e^{ik_{y0}j\Delta y} \zeta_0^n \quad (2.4.5)$$

$$v_y^n(i, j+0.5) = v_{y0} e^{ik_{x0}i\Delta x} e^{ik_{y0}(j+0.5)\Delta y} \zeta_0^n \quad (2.4.6)$$

式(2.4.4)~(2.4.6)を式(2.4.1)~(2.4.3)に代入し、空間離散化幅の比を $r_a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, 空間離散化幅と時間

離散化幅の関係を Courant 数 $T_{x0} = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ とおく。さらに $S_{x0} = \sin \frac{k_{x0}\Delta x}{2}$, $S_{y0} = \sin \frac{k_{y0}\Delta y}{2}$,

$C_{x0} = \cos \frac{k_{x0}\Delta x}{2}$, $Z_0 = \zeta_0^{\frac{1}{2}} - \zeta_0^{\frac{1}{2}}$ をそれぞれ定義することで次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} Z_0 & -i2\rho c T_{x0} S_{x0} & -i2r_a \rho c T_{x0} S_{y0} \\ -i2\frac{T_{x0}}{\rho c} S_{x0} & Z_0 & 0 \\ -i2r_a \frac{T_{x0}}{\rho c} S_{y0} & 0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

ここで, p_0, v_{x0}, v_{y0} が 0 でない解をもつためには式(2.4.7)の左辺行列 \mathbf{A}_0 の行列式 $|\mathbf{A}_0|$ が 0 となる必要があり, この条件は次式で表される。

$$Z_0^2 + 4T_{x0}^2 (S_{x0}^2 + r_a^2 S_{y0}^2) = 0 \quad (2.4.8)$$

$A_0 = 1 - 2T_{x0}^2 (S_{x0}^2 + r_a^2 S_{y0}^2)$ とおき式(2.4.8)を変形すると次式のようなになる。

$$\zeta_0^2 - 2A_0\zeta_0 + 1 = 0 \quad (2.4.9)$$

式(2.4.9)が安定するためには $|\zeta_0| \leq 1$ である必要があり, このときの条件は $-1 \leq A_0 \leq 1$ である。よって次式が導かれる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{S_x^2}{\Delta x^2} + \frac{S_y^2}{\Delta y^2}}} \quad (2.4.10)$$

式(2.4.10)と $|S_x| \leq 1, |S_y| \leq 1$ より次式が安定条件となる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (2.4.11)$$

さらに $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ のとき, 式(2.4.11)は次式のようなになる。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{2}c} \quad (2.4.12)$$

式(2.4.12)より 2次元音場で Courant 数は $1/\sqrt{2}$ が最大である。

FDTD 法では空間に連続的に分布する波動を参照点の値のみで表現するため, 波長 λ [m] に対して十分に細かい空間離散化幅を採用せねばならず, 一般的には波長の 10~20 分の 1 程度の細かさが必要とされている。解析対象上限周波数を $f_{\max} = 340$ [Hz], 空気中の音速を $c = 340$ [m/s] とすると, $\lambda = c/f$ より解析対象周波数で最小の波長は $\lambda_{\min} = 1$ となり, このとき $\Delta x = \Delta y = 5.0 \times 10^{-2}$ [m] とすると空間離散化幅が波長に対して十分に小さくなる。また, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ [s] で式(2.4.12)を満足する。

2.4.2 数値的な分散解析

時間進行による波形の崩れは分散性による[31]。本節では 2.4.1 節で定義した増幅率 ζ_0 の性質を検討する。式(2.4.9)より ζ_0 は次式で表される。

$$\zeta_0 = A_0 \pm i\sqrt{1-A_0^2} \quad (-1 \leq A_0 \leq 1) \quad (2.4.13)$$

式(2.4.13)には解が 2 つあるが、これは平面波を入力後に波が 2 つの進行方向をもつからである。式(2.4.13)の+側は y 軸正方向に進む波、-側は y 軸負方向に進む波を表している。式(2.4.13)より ζ_0 の振幅、位相はそれぞれ次式のようにになる。

$$|\zeta_0| = A_0^2 + (1-A_0^2) = 1 \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} \angle \zeta_0 &= \tan^{-1} \frac{\pm \sqrt{1-A_0^2}}{A_0} \\ \leftrightarrow \angle \zeta_0 &= \pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-A_0^2}}{A_0} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

式(2.4.14)より時間ステップ n が進んでも波の振幅増幅率は 1 で一定である。一方、理論的な 1 ステップ進んだときの位相の変化量の絶対値は $\omega\Delta t$ であるが、これと式(2.4.15)の数値的な位相の変化量の比較で分散性を調べることができる。

$\Delta x = \Delta y = \Delta h$ のとき、 $r_a = 1$ より A_0 は伝搬角 α を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - 2T_{x0}^2 (S_{x0}^2 + S_{y0}^2) \\ \leftrightarrow A_0 &= 1 - 2 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{k_0 \Delta h \sin \alpha}{2} + \sin^2 \frac{k_0 \Delta h \cos \alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

式(2.4.15)は複雑であるため、次式のように数値的に位相誤差 ε_0 を評価する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\angle \zeta_0 \mp \omega\Delta t}{\pm \omega\Delta t} \\ &= \frac{\pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-A_0^2}}{A_0} \mp \omega\Delta t}{\pm \omega\Delta t} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

波数と空間離散化幅の関係は次式で表される。

$$k_0 \Delta h = \frac{2\pi f}{c} \Delta h = 2\pi \frac{\Delta h}{\lambda} \quad (2.4.18)$$

図 2.4.1 は式(2.4.17)の上側の符号を採用したときの音波の位相に関する位相誤差 [%] を伝搬角が $\alpha=0$ から $\pi/2$ まで $\pi/12$ 刻みで示している。横軸は空間離散化幅と波長の比 $\Delta h/\lambda$ で、値が大きいほど空間を粗く離散化していることを表す。図 2.4.1 (a)は Courant 数を式(2.4.12)より最大となる

$T_x=1/\sqrt{2}$ に近似した $T_x=0.707$ とし、このとき時間離散化幅は $\Delta t=1.04\times 10^{-4}$ [s] である。図 2.4.1 (b) は $\Delta t=1.00\times 10^{-4}$ [s] とし、このとき Courant 数は $T_x=0.680$ となる。図より、 $\Delta h/\lambda$ が大きくなると分散誤差は増大する。 Δh を一定とすると横軸は周波数に相当するため、周波数が高くなると誤差が大きくなることを示している。また、伝搬角が x, y 軸方向から遠くなる緑の一点鎖線で示した $\alpha=\pi/4$ のときの誤差の絶対値が小さく、軸に近づくと誤差は広がり、軸と一致する黒の実線で示した $\alpha=0, \pi/2$ のときに誤差が最も大きくなる。さらに、Courant 数が大きい方が誤差は小さくなっていることがわかる。すなわち、時間離散化幅は小さいほどよいというわけではなく、安定条件の式(2.4.12)を満たす限界に近い Δt を採用する方が誤差は小さくなる。なお、式(2.4.17)の下側の符号を採用したときの位相誤差も上側の符号のときの結果と同様になる。

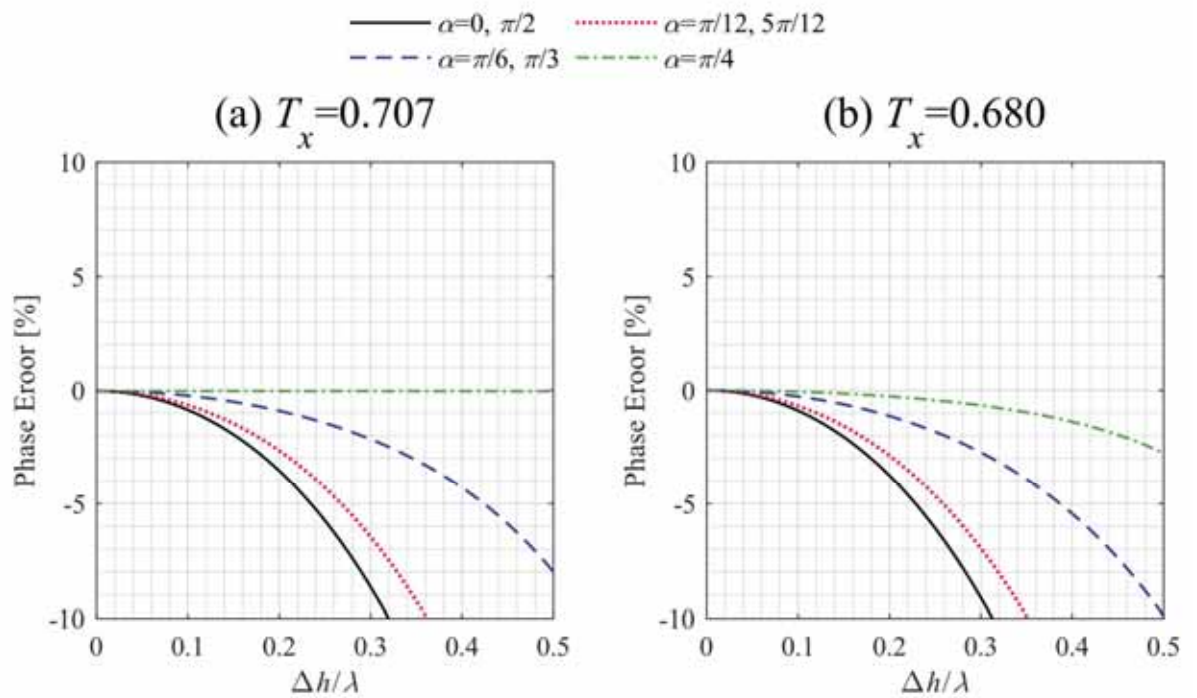


図 2.4.1 Courant 数, 伝搬角に依存する位相誤差

さらに、図 2.4.2 に理論的な音速 c と $\Delta h/\lambda=0.05$ とした場合の $T_x=0.707, 0.680$ のときの位相誤差を加味した位相速度 c_p の割合を示す。 c_p は式(2.4.17)の ε_0 を用いて次式で表される。

$$\frac{c_p}{c} = 1 + \varepsilon_0 \quad (2.4.19)$$

図 2.4.2 の角度の軸は伝搬角 α であり、真上方向が $\alpha=0$ であることに注意しなくてはならない。理論的な割合は $c_p/c=1$ となり、これを黒の実線で示すこととする。また割合の軸の最小値は 0 ではなく 0.997 としている。図より誤差は x 軸、 y 軸に相当する $\alpha=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ で最大、軸から離れた $\alpha=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ で最小となり、軸に関して対称であることがわかる。

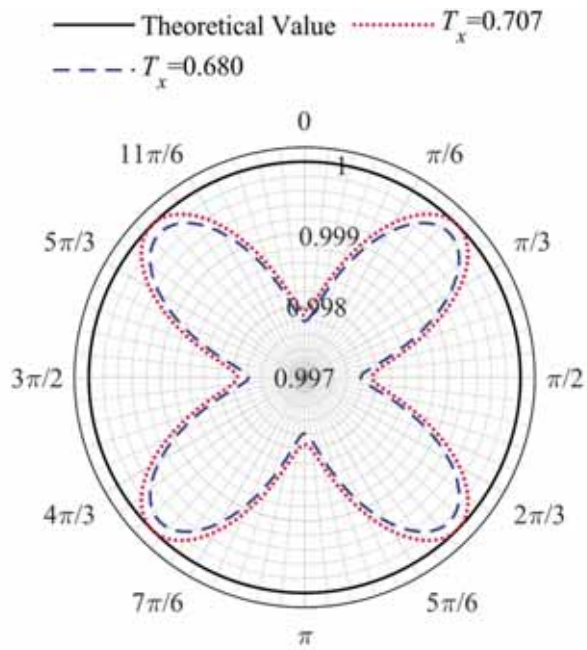


図 2.4.2 理論的な音速と位相誤差を加味した位相速度の割合

2.5 変換音場の定式化

通常音場では、同じ形状や条件の散乱体が等間隔に並んでいるにも関わらず、数多くの散乱体を配置した音場を計算モデルとしなければならない。本章では音場を領域変換することによって単位構造のみを取り出して構造全体の評価する方法を検討し、計算の効率化を目指す。

2.5.1 音場の変換

2次元音場において、図 2.5.1 のように x 軸方向に 1次元に周期的に配置された散乱体を考える。散乱体は間隔 L [m] で無限個並んでいる。このとき、入射平面波は y 軸に関して θ [rad] の角度で伝搬するものとする。この構造の周期性から、 $x=0$ から $x=L$ の間の単位構造の領域中の音圧と粒子速度のみを用い、 $x=0$, $x=L$ の境界条件を連続境界とすることで解析を行う。ここで、連続境界とは右端にきた音波を左端から、左端にきた音波を右端から伝搬させる境界である。具体的には、 $x=0, x=L$ 上の x 方向粒子速度を更新する際、左右端に位置する音圧の差分を利用することでこれを実現する。このような伝搬は次式のように表される。

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=L} \quad (2.5.1)$$

しかし、連続境界の実装だけでは垂直入射の場合以外、すなわち、斜入射の場合には正確な伝搬を模擬できない。さて、任意の y 座標の $x=0$, $x=L$ 上の点をもつ x 方向粒子速度の値を考えれば、時間項を $e^{-i\omega t}$ とした周波数領域において次式のような関係がある。

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=L} e^{-ik_x L} \quad (2.5.2)$$

ただし、 $k_x = \omega \sin \theta / c$ は変換音場における空気中の波数 $k = \omega / c$ の x 方向成分である。

ここで、図 2.5.1 のように、 $y=y_0$ 上の $x=0$ の点を A、 $x=L$ の点を B、B と同位相の波面上にある点を C とし、CB の位相を θ 分だけずらして AB が波面となるように音場を変換する。点 A、B、C の x 方向粒子速度をそれぞれ v_{xA} , v_{xB} , v_{xC} とおく。 x 軸方向に周期的な構造中の位相差を考慮して、次式のような補助変数を導入し、任意の点における v_x を V_x に変換する。

$$V_x = v_x e^{-ik_x x} \quad (2.5.3)$$

式(2.5.3)より、点 A、B はそれぞれ $x=0$, $x=L$ の位置にあるから次式が得られる。

$$V_{xA} = v_{xA} e^0 = v_{xA} \quad (2.5.4)$$

$$V_{xB} = v_{xB} e^{-ik_x L} = v_{xB} e^{-ik \sin \theta L} \quad (2.5.5)$$

さて、点 B、C は同位相の波面上にあるため、次式が成り立つ。

$$v_{xB} = v_{xC} \quad (2.5.6)$$

また、点 C は点 A よりも $L \sin \theta$ だけ進んだ点であるから、次式が成り立つ。

$$v_{xC} = v_{xA} e^{ikL \sin \theta} \quad (2.5.7)$$

よって、式(2.5.4)～(2.5.7)より次式が導かれる。

$$V_{xB} = v_{xB} e^{-ikL \sin \theta} = v_{xC} e^{-ikL \sin \theta} = v_{xA} e^{ikL \sin \theta} e^{-ikL \sin \theta} = v_{xA} = V_{xA} \quad (2.5.8)$$

式(2.5.8)は、上記の変換を行うことで斜入射の場合の音場を垂直入射のものと同等として扱うことができる、すなわち連続境界を用いて斜入射の伝搬を模擬することができることを示している。

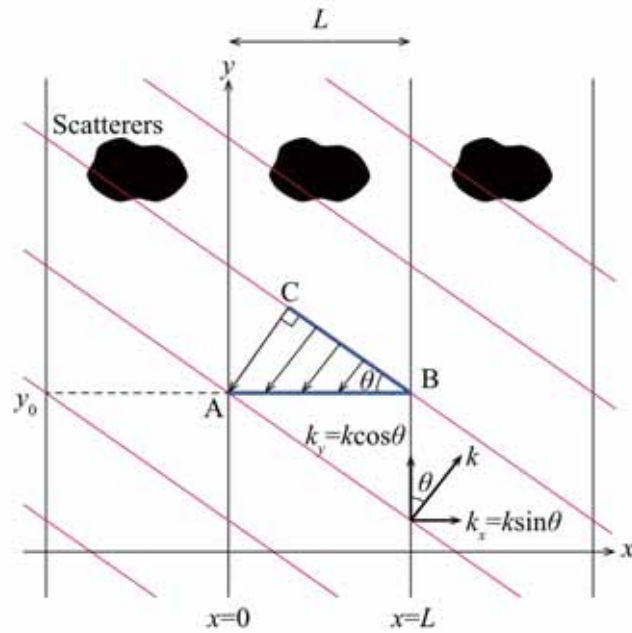


図 2.5.1 平面波が θ の角度で入射する x 軸方向に周期的な構造

2.5.2 支配式

本節では、音場の支配式である連続方程式、運動方程式を補助変数を用いて領域変換する。 x 方向の境界条件は連続境界とするため、単位構造の y 方向のみ PML を実装する。このとき、音圧 p は次式のように x 方向成分と y 方向成分に分割される。

$$p = p_x + p_y \quad (2.5.9)$$

連続方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.5.10)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} p_y = -\kappa \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (2.5.11)$$

また、運動方程式は次式のように表される。

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.5.12)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \eta_{y0} v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.5.13)$$

ここで、位相差を除くために次式のような音圧と粒子速度に関する時間項を $e^{-i\omega t}$ とした補助変数を導入し、音場の Bloch 変換を行う。

$$P = \frac{pe^{-ik_x x}}{Z} \leftrightarrow p = PZe^{ik_x x} \quad (2.5.14)$$

$$P_x = \frac{p_x e^{-ik_x x}}{Z} \leftrightarrow p_x = P_x Ze^{ik_x x} \quad (2.5.15)$$

$$P_y = \frac{p_y e^{-ik_x x}}{Z} \leftrightarrow p_y = P_y Ze^{ik_x x} \quad (2.5.16)$$

$$V_x = v_x e^{-ik_x x} \leftrightarrow v_x = V_x e^{ik_x x} \quad (2.5.17)$$

$$V_y = v_y e^{-ik_x x} \leftrightarrow v_y = V_y e^{ik_x x} \quad (2.5.18)$$

ただし、 $Z = \rho c$ は空気の特徴インピーダンスである。式(2.5.14)～(2.5.18)の左の変換は順変換、右の変換は逆変換である。式(2.5.14)～(2.5.16)を式(2.5.9)に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} PZe^{ik_x x} &= P_x Ze^{ik_x x} + P_y Ze^{ik_x x} \\ \leftrightarrow P &= P_x + P_y \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

また、式(2.5.14)～(2.5.18)の関係を式(2.5.10)～(2.5.13)に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_x}{\partial t} &= -\kappa \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_x Z e^{ik_x x}}{\partial t} &= -\kappa \frac{\partial V_x e^{ik_x x}}{\partial x} \\
\leftrightarrow e^{ik_x x} \frac{\partial P_x Z}{\partial t} &= -\kappa \left(e^{ik_x x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial e^{ik_x x}}{\partial x} \right) \\
\leftrightarrow e^{ik_x x} \frac{\partial P_x Z}{\partial t} &= -\kappa \left(e^{ik_x x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + ik_x V_x e^{ik_x x} \right) \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - (ik_x c V_x)
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} p_y &= -\kappa \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_y Z e^{ik_x x}}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} P_y Z e^{ik_x x} &= -\kappa \frac{\partial V_y e^{ik_x x}}{\partial y} \\
\leftrightarrow e^{ik_x x} \frac{\partial P_y Z}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} P_y Z e^{ik_x x} &= -\kappa e^{ik_x x} \frac{\partial V_y}{\partial y} \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} P_y &= -c \frac{\partial V_y}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\leftrightarrow \rho \frac{\partial V_x e^{ik_x x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P Z e^{ik_x x}}{\partial x} \\
\leftrightarrow \rho e^{ik_x x} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -e^{ik_x x} \frac{\partial P Z}{\partial x} - P Z \frac{\partial e^{ik_x x}}{\partial x} \\
\leftrightarrow \rho e^{ik_x x} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -e^{ik_x x} \frac{\partial P Z}{\partial x} - ik_x e^{ik_x x} P Z \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} - (ik_x c P)
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \eta_{y0} v_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\leftrightarrow \rho \frac{\partial V_y e^{ik_x x}}{\partial t} + \eta_{y0} V_y e^{ik_x x} &= -\frac{\partial PZ e^{ik_x x}}{\partial y} \\
\leftrightarrow \rho e^{ik_x x} \frac{\partial V_y}{\partial t} + \eta_{y0} V_y e^{ik_x x} &= -e^{ik_x x} \frac{\partial PZ}{\partial y} \\
\leftrightarrow \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} + \eta_{y0} V_y &= -\frac{\partial PZ}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

変換された音場の定式化の式(2.5.20), (2.5.22)の右辺に括弧で示した新しい特別な項が生成されたことが見て取れる。これらの特別な項があると、FDTD法の離散化が難しくなる。その理由の1つは両辺に異なる変数の時間微分が存在するからである。また他の理由として、右辺に同じ変数の時間微分と空間微分が存在し、その結果、通常のスタガードグリッド上では合理的に配置できないことが挙げられる。ただし、 $-i\omega$ と $\partial/\partial t$ は同値である。

Split-Field法[25, 26]を用い、これらの項の影響を分割する。次式のようなスプリット変数を定義する。

$$P_x = P_x^a + P_x^b \tag{2.5.24}$$

$$V_x = V_x^a + V_x^b \tag{2.5.25}$$

式(2.5.24)を式(2.5.20)に代入し、さらに $P_x^b = V_x \sin\theta$ と定義する。 $Z = \rho c$, $k_x = \omega \sin\theta / c$, $\kappa = \rho c^2$, また、時間項は $e^{-i\omega t}$ であることから次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - ik_x c V_x \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - i \frac{\omega}{c} \sin\theta c V_x \\
\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (P_x^a + P_x^b) &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} V_x \sin\theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_x^a}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \sin\theta &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \sin\theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial P_x^a}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.5.26}$$

また、式(2.5.25)を式(2.5.22)に代入し、さらに $V_x^b = P \sin \theta$ と定義すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} - ik_x c P \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\omega}{c} \sin \theta c P \\
\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (V_x^a + V_x^b) &= -c \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} P \sin \theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x^a}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \sin \theta &= -c \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \sin \theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x^a}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} \tag{2.5.27}
\end{aligned}$$

P_x の定義から P_x^b を消去し、さらに V_x の関係を代入後、式(2.5.19)を代入すると次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
P_x &= P_x^a + P_x^b \\
\leftrightarrow P_x &= P_x^a + V_x \sin \theta \\
\leftrightarrow P_x &= P_x^a + (V_x^a + V_x^b) \sin \theta \\
\leftrightarrow P_x &= P_x^a + (V_x^a + P \sin \theta) \sin \theta \\
\leftrightarrow P_x &= P_x^a + \{V_x^a + (P_x + P_y) \sin \theta\} \sin \theta \\
\leftrightarrow P_x &= \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} (P_x^a + P_y \sin^2 \theta + V_x^a \sin \theta) \tag{2.5.28}
\end{aligned}$$

さらに、 V_x の定義から V_x^b を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
V_x &= V_x^a + V_x^b \\
\leftrightarrow V_x &= V_x^a + P \sin \theta \tag{2.5.29}
\end{aligned}$$

式(2.5.19), (2.5.21), (2.5.23), (2.5.26)~(2.5.29)の計7式を通常音場の支配式とする。

2.5.3 離散化

ここで、2.5.2 節で得られた式を空間離散化幅 Δx , Δy , 時間離散化幅 Δt , 空間ステップ i, j を用いて離散化する。時間に関しても同様に時間ステップ n を用いて離散化する。式(2.5.19), (2.5.21), (2.5.23), (2.5.26)~(2.5.29)を離散化すると、次式のように表される。

$$P^n(i, j) = P_x^n(i, j) + P_y^n(i, j) \quad (2.5.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_y^{n+1}(i, j) - P_y^n(i, j)}{\Delta t} + \frac{\eta_{y0}}{\rho} \frac{P_y^{n+1}(i, j) + P_y^n(i, j)}{2} \\ &= -c \frac{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5)}{\Delta y} \\ \Leftrightarrow & P_y^{n+1}(i, j) \\ &= \frac{2\rho - \eta_{y0}\Delta t}{2\rho + \eta_{y0}\Delta t} P_y^n(i, j) - \frac{2\rho c\Delta t}{\Delta y(2\rho + \eta_{y0}\Delta t)} \{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{\Delta t} + \eta_{y0} \frac{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) + V_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{2} \\ &= -Z \frac{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)}{\Delta y} \\ \Leftrightarrow & V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) \\ &= \frac{2\rho - \eta_{y0}\Delta t}{2\rho + \eta_{y0}\Delta t} V_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{2Z\Delta t}{\Delta y(2\rho + \eta_{y0}\Delta t)} \{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)\} \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_x^{a^{n+1}}(i, j) - P_x^{a^n}(i, j)}{\Delta t} = -c \frac{V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i-0.5, j)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow & P_x^{a^{n+1}}(i, j) = P_x^{a^n}(i, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) - V_x^{a^{n-0.5}}(i+0.5, j)}{\Delta t} = -c \frac{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow & V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) = V_x^{a^{n-0.5}}(i+0.5, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)\} \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

$$\begin{aligned}
& P_x^n(i, j) \\
&= \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} \left\{ P_x^{a^n}(i, j) + P_y^n(i, j) \sin^2 \theta + \frac{V_x^{a^n}(i+0.5, j) + V_x^{a^n}(i-0.5, j)}{2} \sin \theta \right\} \\
&\leftrightarrow P_x^n(i, j) \\
&= \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} \left[P_x^{a^n}(i, j) + P_y^n(i, j) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{2} \{ V_x^{a^n}(i+0.5, j) + V_x^{a^n}(i-0.5, j) \} \right] \quad (2.5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) &= V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) + \frac{P^{n+0.5}(i+1, j) + P^{n+0.5}(i, j)}{2} \sin \theta \\
&\leftrightarrow V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) &= V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) + \frac{\sin \theta}{2} \{ P^{n+0.5}(i+1, j) + P^{n+0.5}(i, j) \} \quad (2.5.36)
\end{aligned}$$

ここで、 $\eta_y = \eta_{y0} \Delta t / 2\rho$ より、式(2.5.31)、(2.5.32)は次式のようになる。

$$P_y^{n+1}(i, j) = \frac{1 - \eta_y}{1 + \eta_y} P_y^n(i, j) - \frac{c \Delta t}{(1 + \eta_y) \Delta y} \{ V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5) \} \quad (2.5.37)$$

$$V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = \frac{1 - \eta_y}{1 + \eta_y} V_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{c \Delta t}{(1 + \eta_y) \Delta y} \{ P^n(i, j+1) - P^n(i, j) \} \quad (2.5.38)$$

また、式(2.5.1)で表される連続境界の実装により、式(2.5.34)、(2.5.38)において空間ステップが $i=1$ で表される単位構造の左端の粒子速度 ($i=0.5$) と、 $i=i_{\max}$ で表される単位構造の右端の粒子速度 ($i=i_{\max}+0.5$) はそれぞれ次式で表される。

$$V_x^{a^{n+0.5}}(0.5, j) = V_x^{a^{n-0.5}}(0.5, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ P^n(1, j) - P^n(i_{\max}, j) \} \quad (2.5.39)$$

$$V_x^{a^{n+0.5}}(i_{\max} + 0.5, j) = V_x^{a^{n-0.5}}(i_{\max} + 0.5, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ P^n(1, j) - P^n(i_{\max}, j) \} \quad (2.5.40)$$

$$V_x^{n+0.5}(0.5, j) = V_x^{a^{n+0.5}}(0.5, j) + \frac{\sin \theta}{2} \{ P^{n+0.5}(1, j) + P^{n+0.5}(i_{\max}, j) \} \quad (2.5.41)$$

$$\begin{aligned}
& V_x^{n+0.5}(i_{\max} + 0.5, j) \\
&= V_x^{a^{n+0.5}}(i_{\max} + 0.5, j) + \frac{\sin \theta}{2} \{ P^{n+0.5}(1, j) + P^{n+0.5}(i_{\max}, j) \} \quad (2.5.42)
\end{aligned}$$

通常の FDTD 法では粒子速度 v_x , v_y は音圧 p の参照点から時間について $\Delta t/2$ だけずらして定義される。通常音場と同様に表 2.5.1 のように $n=0$ のときの音圧 P , P_x , P_x^a , P_y を初期時刻として初期条件 (図中○印) を与え、 $n=0.5$ 以降は音圧と粒子速度のそれぞれの値を交互に求める。また、表 2.5.2 では $n=0$ のときの音圧に加えて $n=0.5$ のときの V_x , V_x^a , V_y を初期条件として与えて更新する。

表 2.5.1 $n=0$ の音圧に初期条件を与えたときの更新の順序

	P	P_x	P_x^a	P_y	V_x	V_x^a	V_y
$n=0$	○	○	○	○			
$n=0.5$						①	②
$n=1$				③			

表 2.5.2 $n=0$ の音圧, $n=0.5$ の粒子速度に初期条件を与えたときの更新の順序

	P	P_x	P_x^a	P_y	V_x	V_x^a	V_y
$n=0$	○	○	○	○			
$n=0.5$					○	○	○
$n=1$			①	②			
$n=1.5$							

これらの初期条件の与え方では変換された音場の式(2.5.30), (2.5.33)~(2.5.38)は音圧と粒子速度の両方の要素が半時間ステップごとに参照されるため, これ以上の更新ができない。ここで, $n=0$, $n=0.5$ の2つを初期時刻として表 2.5.3 のようにすべての音圧と粒子速度に初期条件を与え, $n=1$ 以降は表の順序でそれぞれの値を求めることとする。

表 2.5.3 更新の順序

	P	P_x	P_x^a	P_y	V_x	V_x^a	V_y
$n=0$	○	○	○	○	○	○	○
$n=0.5$	○	○	○	○	○	○	○
$n=1$	⑥	⑤	①	④	⑦	③	②
$n=1.5$	⑬	⑫	⑧	⑪	⑭	⑩	⑨
$n=2$	⑳	⑲	⑮	⑱	㉑	⑰	⑯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$n=1$ を第1ステップの1回目, $n=1.5$ を第1ステップの2回目, $n=2$ を第2ステップの1回目…と考え, 1回目と2回目を合わせて単位時間ステップとする方法はデュアルグリッドと呼ばれる。これによりすべての変数の更新が可能になる。

2.5.4 音源

通常音場と同様に離散化されたガウシアンパルスは次式で表される。

$$F(n) = me^{-C(n\Delta t - t_0)^2} \quad (2.5.43)$$

式(2.5.30)を加振したい点における音圧の式(2.5.33), (2.5.37)に $1/2$ ずつ与える。変換音場は斜入射を垂直入射と同等に扱う場であるため、音源は単位構造の下端に一直線状に並べる。ここで、逆変換後の値がガウシアンパルスになるよう入力することに注意しなければならない。加振した式は次のようになる。

$$P_x^{a^{n+1}}(i, j) = \frac{\left[P_x^{a^n}(i, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \right] \cdot Z + \frac{F(n)}{2}}{Z} \quad (2.5.44)$$

$$P_y^{n+1}(i, j) = \frac{\left[\frac{1-\eta_y}{1+\eta_y} P_y^n(i, j) - \frac{c\Delta t}{(1+\eta_y)\Delta y} \{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \right] \cdot Z + \frac{F(n)}{2}}{Z} \quad (2.5.45)$$

ただし、2.5.3 節のデュアルグリッドの 2 回目のみに加振するものとする。

2.6 変換音場の数値計算例

これまで述べてきた変換音場の解析の妥当性を示すため、透過損失と音圧分布を求める。透過損失は変換音場における算出法を検討後、解を通常音場のものと比較した。さらに音圧分布は音場に入力された平面波と散乱体による反射波の挙動を調査するために計算した。

2.6.1 変換音場の解析領域

変換音場においても通常音場と同様の寸法をもつモデルを作成する。図 2.6.1 のように変換音場の解析領域を設定した。解析領域の寸法は $x_{\max 0}=y_{\max 0}=5.0$ [m]とし、領域の中心に一辺が a [m] 四方の散乱体を配置した。上下の境界には 2.2.4 節で検討した性能の PML を実装、また左右の境界は連続境界とする。これを本章で定義する単位構造とする。音源は単位構造の下端に一直線状に並べる。

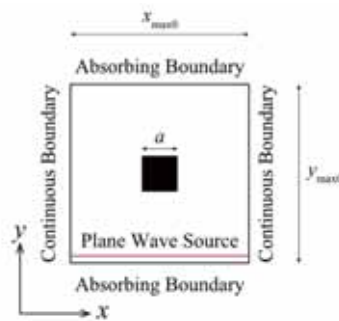


図 2.6.1 変換音場の解析領域

2.6.2 透過損失

単位構造の上端において x 方向に並べた 100 ヶ所の参照点から透過損失を求めた。透過エネルギー E_T は次式で表すことができる。

$$E_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ p(x, y, \omega) \cdot v_y^*(x, y, \omega) \right\} \cdot \Delta t \quad (2.6.1)$$

音圧、粒子速度をそれぞれ離散的にフーリエ逆変換すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} p(x, y, \omega) &= \int_0^\infty p(x, y, t) e^{i\omega t} dt \\ \Leftrightarrow p(x, y, \omega) &= \int_0^\infty P(x, y, t) Z e^{ik_x x} e^{i\omega t} dt \\ \Leftrightarrow p(x, y, \omega) &= Z e^{ik_x x} \int_0^\infty P(x, y, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

$$\begin{aligned} v_y(x, y, \omega) &= \int_0^\infty \frac{v_y(x, y - \Delta y / 2, t) + v_y(x, y + \Delta y / 2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \\ \Leftrightarrow v_y(x, y, \omega) &= \int_0^\infty \frac{V_y(x, y - \Delta y / 2, t) e^{ik_x x} + V_y(x, y + \Delta y / 2, t) e^{ik_x x}}{2} e^{i\omega t} dt \\ \Leftrightarrow v_y(x, y, \omega) &= e^{ik_x x} \int_0^\infty \frac{V_y(x, y - \Delta y / 2, t) + V_y(x, y + \Delta y / 2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

2.3 章で導出した通常音場での積分範囲は $0 \leq t \leq t_{\max}$ であったが、変換音場では解析時間を長くともほど正確な値が得られると考えられるため、積分範囲は $0 \leq t \leq \infty$ とする。式(2.6.2)、(2.6.3)を式(2.6.1)に代入すると E_T は次式で表すことができる。

$$E_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z e^{ik_x x} \int_0^\infty P(x, y, t) e^{i\omega t} dt \cdot \left(e^{ik_x x} \int_0^\infty \frac{V_y(x, y - \Delta y / 2, t) + V_y(x, y + \Delta y / 2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \right)^* \right\} \cdot \Delta t \quad (2.6.4)$$

ここで、オイラーの公式を用いると次式が成り立つ。

$$\left(e^{ik_x x} \right) \cdot \left(e^{ik_x x} \right)^* = (\cos k_x x + i \sin k_x x) (\cos k_x x - i \sin k_x x) = \cos^2 k_x x + \sin^2 k_x x = 1 \quad (2.6.5)$$

式(2.6.5)を式(2.6.4)に代入すると E_T を表す式は次のように書き換えることができる。

$$E_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty P(x, y, t) e^{i\omega t} dt \cdot \left(\int_0^\infty \frac{V_y(x, y - \Delta y / 2, t) + V_y(x, y + \Delta y / 2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \right)^* \right\} \cdot Z \Delta t \quad (2.6.6)$$

i 番目の参照点がそれぞれ点 $(i\Delta x, y)$ で表される 100 ヶ所の E_T の合計は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} E_{T_{\text{total}}} &= i_{\max} Z \Delta t \cdot \\ &\sum_{i=1}^{i_{\max}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\int_0^\infty \frac{V_y(i\Delta x, y - \Delta y / 2, t) + V_y(i\Delta x, y + \Delta y / 2, t)}{2} e^{i\omega t} dt \right)^* \cdot \int_0^\infty P(i\Delta x, y, t) e^{i\omega t} dt \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

透過エネルギーレベル L_T 、透過損失 TL はそれぞれ次式のようにになる。

$$L_T = 10 \log_{10} E_{T_{\text{total}}} \quad (2.6.8)$$

$$TL = L_{T_0} - L_{T_1} \quad (2.6.9)$$

ただし、 L_{T_0} 、 L_{T_1} はそれぞれ散乱体なし、ありのときの透過エネルギーレベルである。式(2.6.8)において L_{T_0} 、 L_{T_1} とともに $10 \log_{10}(i_{\text{max}} Z \Delta t)$ の項をもち、式(2.6.9)の引き算でこれらは消去される。これと式(2.6.4)より E_T に $e^{ik_x x}$ と Z を考慮する必要はないため、式(2.6.1)は次式に書き換えられる。

$$E_T = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ P(x, y, \omega) \cdot V_y^*(x, y, \omega) \right\} \cdot \Delta t \quad (2.6.10)$$

式(2.6.10)より透過損失を求めるにあたり式(2.5.14)、(2.5.18)の逆変換を行う必要はなく、変換音場の解析で得られる P と V_y の値をそのまま透過損失を算出する式に使用できる。これを 2.3.2 節で求めた $n_x=400$ [個]のときの通常音場における透過損失と比較する。

図 2.6.2~2.6.4 に単位構造に対して一辺の長さが $a=0.5, 2.5, 4.5$ [m] 四方の散乱体が配置されているときの入射角 $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad] の場合の透過損失を示し、通常音場と変換音場と比較する。離散化幅については 2.7 章で詳しく調査するが、解析対象上限周波数を $f_{\text{max}}=340$ [Hz] とし、空間離散化幅は $\Delta x=\Delta y=5.0 \times 10^{-2}$ [m]、時間離散化幅は $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ でそれぞれ $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-5}, 3.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-5}$ [s] とした。また、解析時間は $t_{\text{max}}=1.0$ [s] としたため、周波数分解能は $\Delta f=1.0$ [Hz] となる。黒の実線で通常音場を、赤の点線で変換音場を表す。さらに、各図の左上には横軸の周波数を 125 Hz から 340 Hz まで、縦軸の透過損失の範囲を 10 dB の範囲に絞った詳細な図を示している。ここでは黒の実線で通常音場を、赤の実線で変換音場を表す。

$a=2.5, 4.5$ の場合については単位構造の大きさに対して散乱体が十分な大きさをもっているため、周期構造の特徴であるバンドギャップが生じていることが確認できる。 $\theta=0$ のときはすべての a で通常音場と変換音場の透過損失は完全に一致している。 $\theta>0$ のときの透過損失のピークやディップの周波数位置は概ね一致している。低域においては透過損失がよく合う一方、ピークを除くと誤差は 5 dB 以内であるが高域になるほど大きくなる。これは FDTD 法での計算による分散性が原因であると考えられる。また、 $a=4.5$ のとき、誤差は入射角が増えるほど大きくなるが、このことについては 2.7 章で議論する。

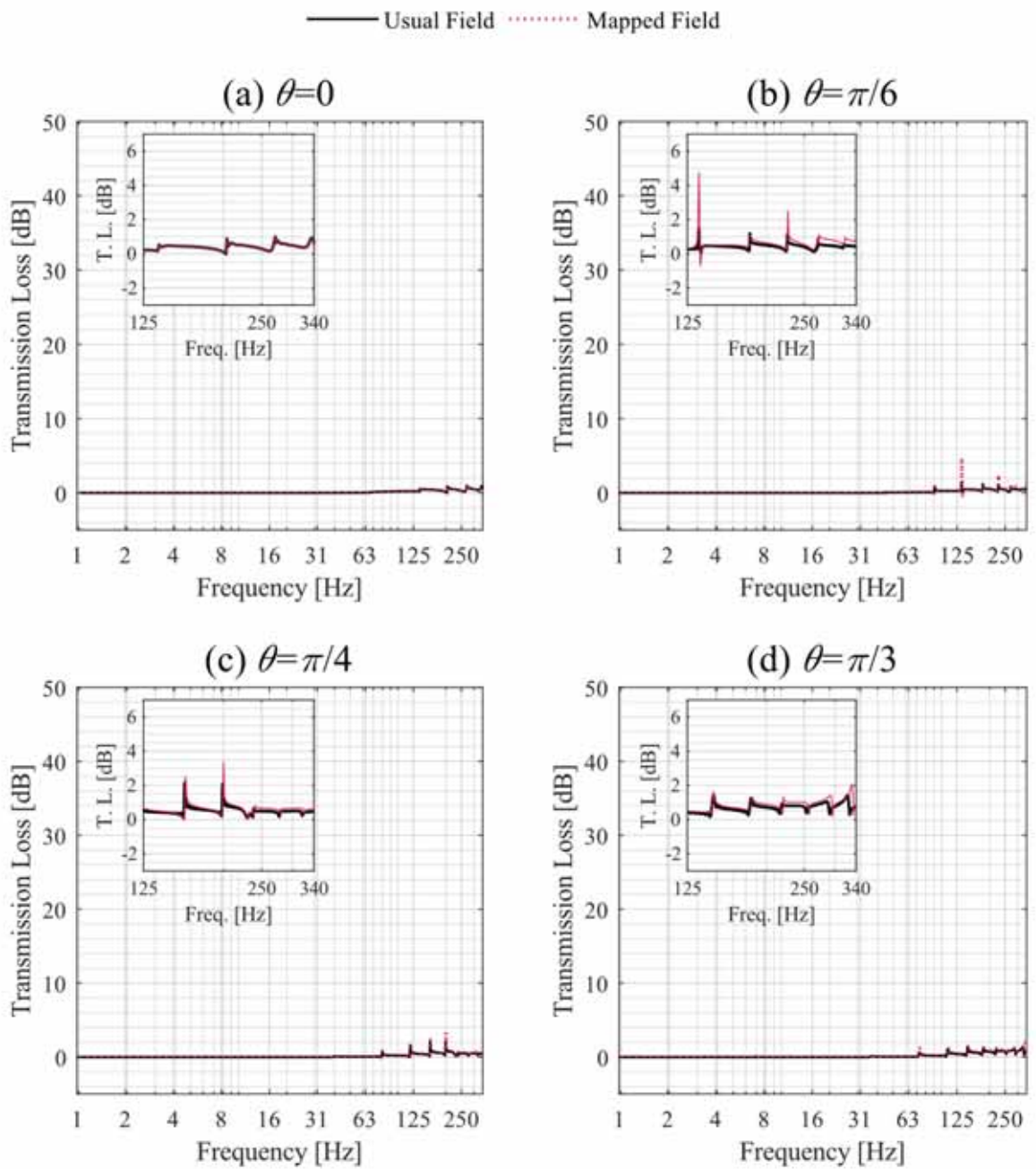


図 2.6.2 $a=0.5$ のときの通常音場と変換音場の透過損失

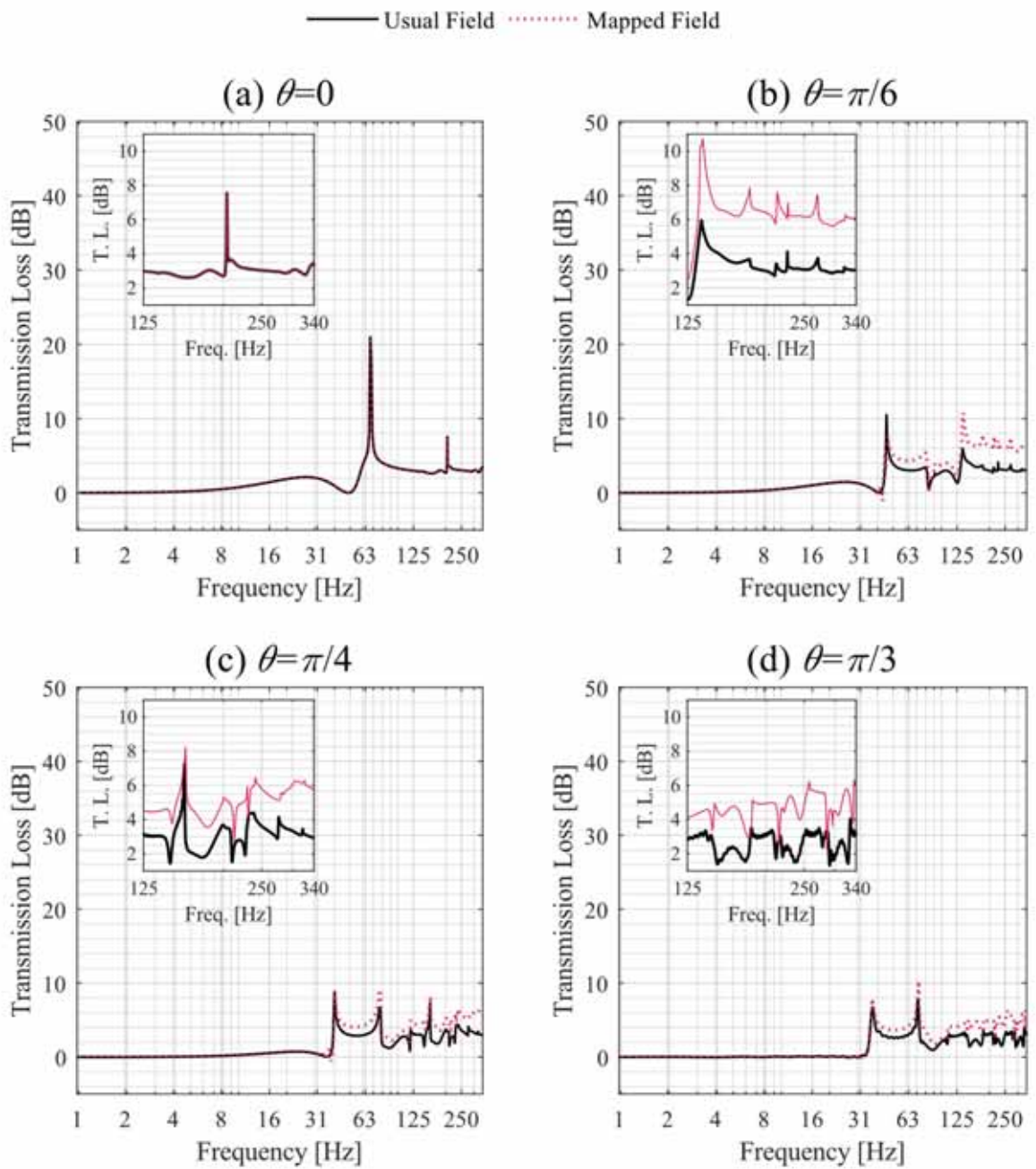


図 2.6.3 $a=2.5$ のときの通常音場と変換音場の透過損失

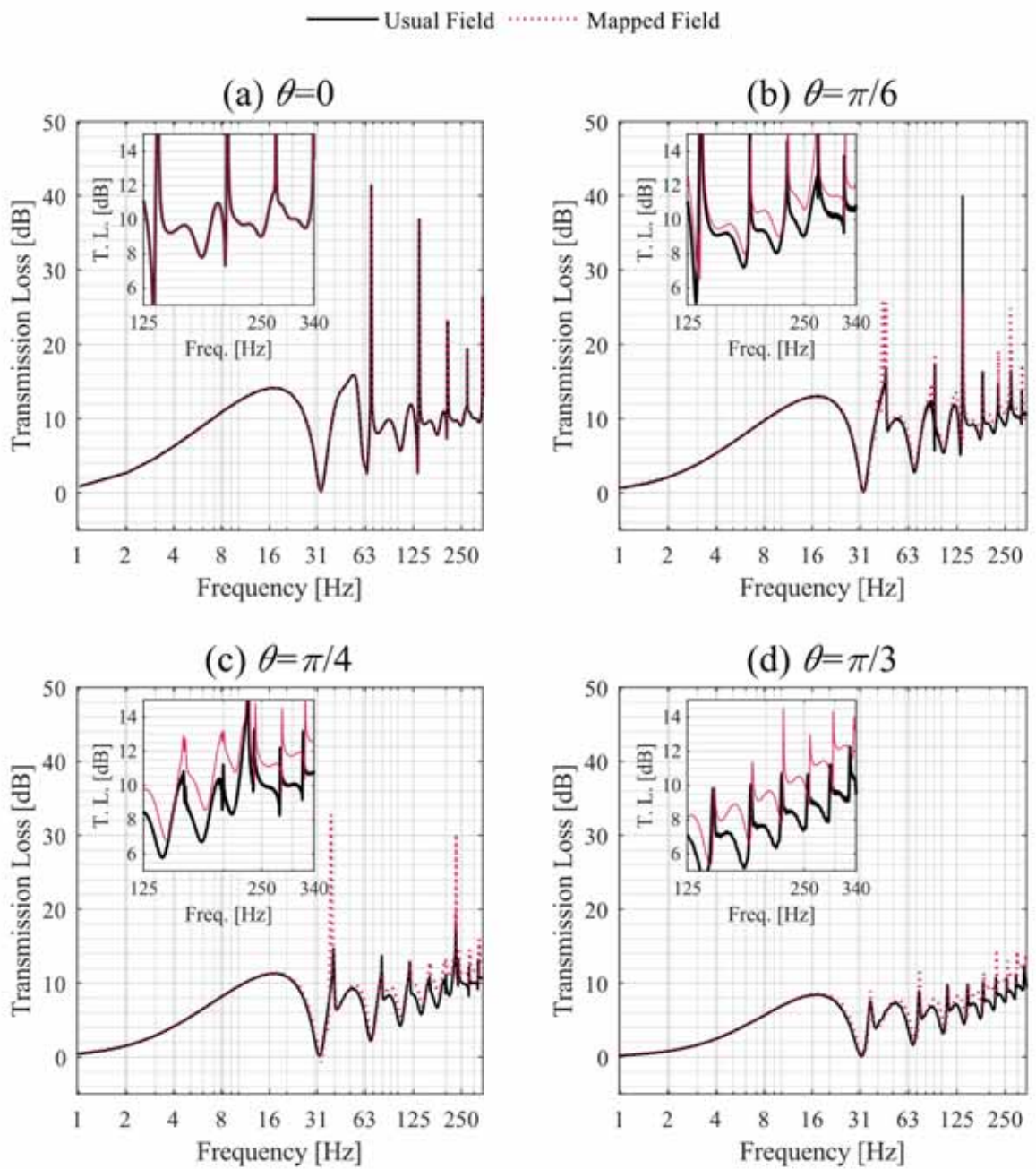


図 2.6.4 $a=4.5$ のときの通常音場と変換音場の透過損失

2.6.3 音圧分布

$x_{\max 0}=y_{\max 0}=5$ [m]の単位構造に対して、単位構造の中心に $a=0.5, 2.5, 4.5$ [m]の境界が剛な散乱体を配置し、入射角を $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad]とした場合の通常音場と変換音場の音圧の空間分布を図 2.6.5~2.6.7 に示す。通常音場は図 2.3.1 の中央にグレーで囲んだ領域に両隣の散乱体を合わせた3つの散乱体周辺の音圧分布を書き出している。さて、式(2.5.14)の変換を時間領域で表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
 \Leftrightarrow p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) Z e^{i\frac{\omega}{c} \sin\theta x} e^{-i\omega t} d\omega \\
 \Leftrightarrow p(t) &= \frac{Z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \sin\theta \right)} d\omega \\
 \Leftrightarrow p(t) &= Z \cdot P \left(t - \frac{x}{c} \sin\theta \right)
 \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

よって、 p と P の関係は時間領域では次式となる。

$$p(x, y, t) = Z \cdot P(x, y, t - x \sin\theta / c) \tag{2.6.12}$$

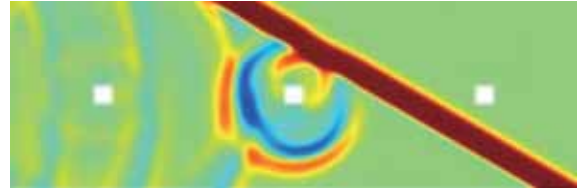
変換音場は式(2.6.12)を用いて単位構造の音圧を逆変換した分布を時間差で左右に3つ配置し結合したものを図にしている。離散化幅は 2.6.2 節と同様に、空間離散化幅は $\Delta x = \Delta y = 5.0 \times 10^{-2}$ [m]、時間離散化幅は $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ でそれぞれ $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-5}, 3.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-5}$ [s]とした。

図より、音場に入射する平面波は通常音場と変換音場でよく一致しており、中央に配置された散乱体から円筒波が反射していることが確認できる。また、図の左に並んでいる散乱体や図には記載されていないさらに左に並んでいる散乱体から反射した円筒波が広がった一部も見られる。図の中央の音圧分布はこれらの波の干渉から複雑なものになっている。このように全体的な傾向は似ているが、散乱体に当たった後の波の動きは少し違う。この違いの理由についても 2.7 章で議論する。ここから、入射角ごとの考察を行う。 $\theta=0$ のときの音圧分布は透過損失と同様に完全に一致する。 $\theta=\pi/3$ のときの通常音場の入射波はプラスとマイナスが交互に現れている。これは 2.4.2 節で述べた分散誤差によるもので入射角が軸方向に近いためであると考えられる。 $\theta=\pi/6$ も $\theta=\pi/3$ と軸からの角度が同じであるがマイナスの入射波は見られないのは、2.3.1 節で設定した直線の音源位置から散乱体が近く、波が散乱体に到達するまでの時間が $\theta=\pi/3$ と比べて短いためである。

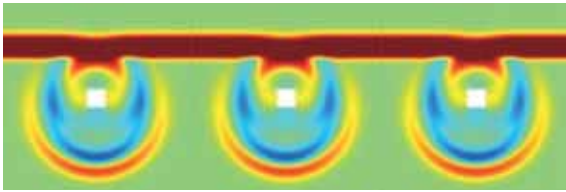
通常音場



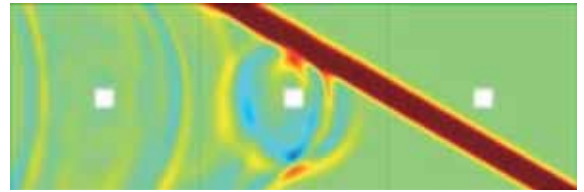
通常音場



変換音場



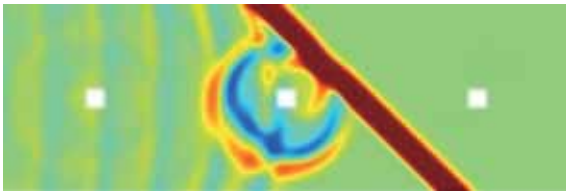
変換音場



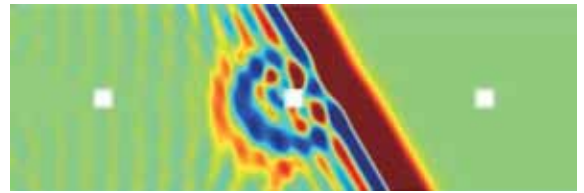
(a) $\theta=0$

(b) $\theta=\pi/6$

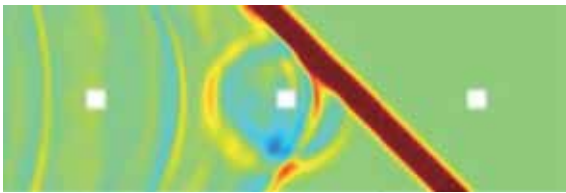
通常音場



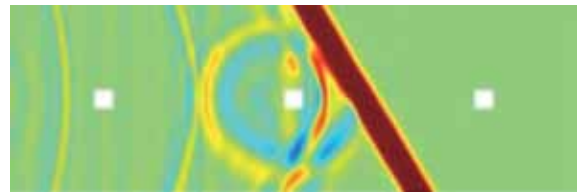
通常音場



変換音場



変換音場

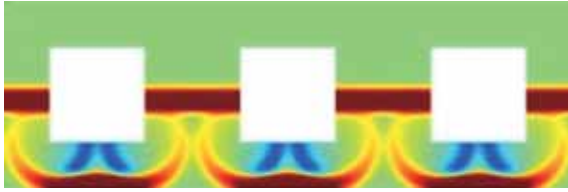


(c) $\theta=\pi/4$

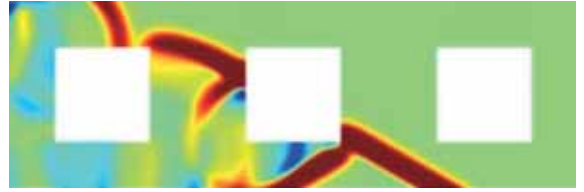
(d) $\theta=\pi/3$

図 2.6.5 $a=0.5$ の通常音場と変換音場のある時刻における音圧分布

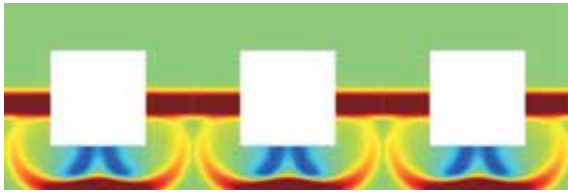
通常音場



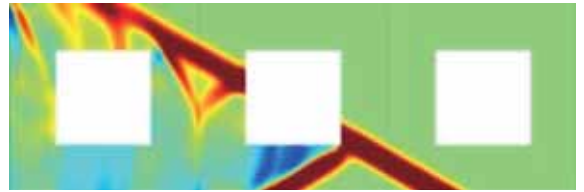
通常音場



変換音場



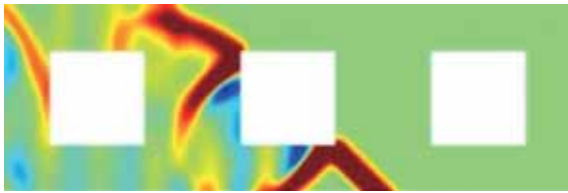
変換音場



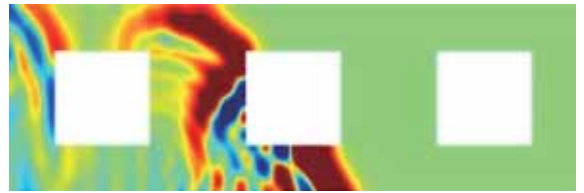
(a) $\theta=0$

(b) $\theta=\pi/6$

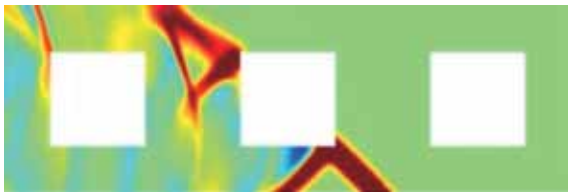
通常音場



通常音場



変換音場



変換音場



(c) $\theta=\pi/4$

(d) $\theta=\pi/3$

図 2.6.6 $a=2.5$ の通常音場と変換音場のある時刻における音圧分布

通常音場



通常音場



変換音場



変換音場



(a) $\theta=0$

(b) $\theta=\pi/6$

通常音場



通常音場



変換音場



変換音場



(c) $\theta=\pi/4$

(d) $\theta=\pi/3$

図 2.6.7 $a=4.5$ の通常音場と変換音場のある時刻における音圧分布

2.7 変換音場の分散性解析と安定性解析

2.4章で通常音場において入射波は理論的には各伝搬角に均等に音速で進むが、数値的な計算誤差があることが示された。さらに変換音場では平面波の伝搬角により位相速度が異なり、より大きな誤差が生じると予想される。本章では、変換音場における平面波の入射角ごとの位相速度や伝搬角による分散性、解が発散しないための Δt の CFL 安定条件を解析することで、変換音場の方程式の特性を考察する。

2.7.1 支配式

前章までに y 方向の境界に実装した PML に関連する項は分散性、安定性について議論するにあたり計算を複雑にする。本章では計算を簡単にするために PML を実装しない変換音場の支配式を考える。連続方程式と運動方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2.7.1)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.7.2)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.7.3)$$

位相差を除くために導入する補助変数は次式で表す。

$$P = \frac{pe^{-ik_x x}}{Z} \leftrightarrow p = PZe^{ik_x x} \quad (2.7.4)$$

$$V_x = v_x e^{-ik_x x} \leftrightarrow v_x = V_x e^{ik_x x} \quad (2.7.5)$$

$$V_y = v_y e^{-ik_x x} \leftrightarrow v_y = V_y e^{ik_x x} \quad (2.7.6)$$

式(2.7.4)~(2.7.6)を式(2.7.1)~(2.7.3)に代入すると変換音場の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ \leftrightarrow \frac{\partial PZe^{ik_x x}}{\partial t} &= -\kappa \left(\frac{\partial V_x e^{ik_x x}}{\partial x} + \frac{\partial V_y e^{ik_x x}}{\partial y} \right) \\ \leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - c \frac{\partial V_y}{\partial y} - (ik_x c V_x) \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\leftrightarrow \rho \frac{\partial V_x e^{ik_x x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P Z e^{ik_x x}}{\partial x} \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} - (ik_x c P)
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\leftrightarrow \rho \frac{\partial V_y e^{ik_x x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P Z e^{ik_x x}}{\partial y} \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

式(2.7.7), (2.7.8)の右辺の新しい項の影響の分割のために次式のようなスプリット変数を定義する。

$$P = P^a + P^b \tag{2.7.10}$$

$$V_x = V_x^a + V_x^b \tag{2.7.11}$$

式(2.7.10)を式(2.7.7)に代入し, さらに $P^b = V_x \sin \theta$ と定義すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - c \frac{\partial V_y}{\partial y} - ik_x c V_x \\
\leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - c \frac{\partial V_y}{\partial y} - i \frac{\omega}{c} \sin \theta c V_x \\
\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (P^a + P^b) &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - c \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} V_x \sin \theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial P^a}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \sin \theta &= -c \frac{\partial V_x}{\partial x} - c \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial t} \sin \theta \\
\leftrightarrow \frac{\partial P^a}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

また, 式(2.7.11)を式(2.7.8)に代入し, さらに $V_x^b = P \sin \theta$ と定義すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_x}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} - ik_x c P \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_x^a}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.7.13}$$

P の定義から P^b を, さらに, V_x の定義から V_x^b を消去するとそれぞれ次式のようにになる。

$$P = P^a + V_x \sin \theta \tag{2.7.14}$$

$$V_x = V_x^a + P \sin \theta \quad (2.7.15)$$

2.7.2 理論的な分散解析

本節では、変換音場の支配式に平面波を入力し、波の挙動を調べて分散誤差を解析する。変換音場の支配式(2.7.9), (2.7.12)~(2.7.15)を、変換音場の平面波の位相速度 c' と伝搬角 α を用いて表すことで平面波の条件を検討する。このとき、波数は $k'_x = \frac{\omega}{c'} \sin \alpha$, $k'_y = \frac{\omega}{c'} \cos \alpha$ のようにそれぞれ表される。音圧 P に関して次のような関係を仮定し平面波を表現する。

$$P = P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \quad (2.7.16)$$

ただし、 P_0 は P の初期値、 $e^{ik'_x x}$, $e^{ik'_y y}$ はそれぞれ x 方向、 y 方向の空間移行、 $e^{-i\omega t}$ は時間進行を示す。同様に次のような関係を仮定する。

$$P^a = P_0^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \quad (2.7.17)$$

$$V_x = V_{x0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \quad (2.7.18)$$

$$V_x^a = V_{x0}^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \quad (2.7.19)$$

$$V_y = V_{y0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \quad (2.7.20)$$

式(2.7.16)~(2.7.20)を式(2.7.9), (2.7.12), (2.7.13)に代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial y} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial V_{y0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial t} &= -c \frac{\partial P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial y} \\ \Leftrightarrow -i\omega V_{y0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} &= -ick'_y P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \\ \Leftrightarrow V_{y0} &= \frac{c}{\omega} k'_y P_0 \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^a}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial P_0^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial V_{x0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial x} + \frac{\partial V_{y0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial y} \right) \\ \Leftrightarrow -i\omega P_0^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} &= -c \left(ik'_x V_{x0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} + ik'_y V_{y0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \right) \\ \Leftrightarrow P_0^a &= \frac{c}{\omega} k'_x V_{x0} + \frac{c}{\omega} k'_y V_{y0} \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_x^a}{\partial t} &= -c \frac{\partial P}{\partial x} \\
\leftrightarrow \frac{\partial V_{x0}^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial t} &= -c \frac{\partial P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t}}{\partial x} \\
\leftrightarrow -i\omega V_{x0}^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} &= -ick'_x P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \\
\leftrightarrow V_{x0}^a &= \frac{c}{\omega} k'_x P_0
\end{aligned} \tag{2.7.23}$$

ここで、式(2.7.14), (2.7.15), (2.7.22), (2.7.23)からスプリット変数を消去する。式(2.7.16)~(2.7.18), (2.7.22)を式(2.7.14)に代入すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
P &= P^a + V_x \sin \theta \\
\leftrightarrow P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} &= P_0^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} + V_{x0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \sin \theta \\
\leftrightarrow P_0 &= P_0^a + V_{x0} \sin \theta \\
\leftrightarrow P_0 - \left(\frac{ck'_x}{\omega} + \sin \theta \right) V_{x0} - \frac{ck'_y}{\omega} V_{y0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.24}$$

また、式(2.7.16), (2.7.18), (2.7.19), (2.7.23)を式(2.7.15)に代入すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
V_x &= V_x^a + P \sin \theta \\
\leftrightarrow V_{x0} e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} &= V_{x0}^a e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} + P_0 e^{ik'_x x} e^{ik'_y y} e^{-i\omega t} \sin \theta \\
\leftrightarrow V_{x0} &= V_{x0}^a + P_0 \sin \theta \\
\leftrightarrow \left(\frac{ck'_x}{\omega} + \sin \theta \right) P_0 - V_{x0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.25}$$

以上より、式(2.7.21), (2.7.24), (2.7.25)の関係は次のような行列の式になる。

$$\begin{bmatrix} \frac{ck'_y}{\omega} & 0 & -1 \\ \frac{ck'_x}{\omega} + \sin \theta & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{ck'_x}{\omega} - \sin \theta & -\frac{ck'_y}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ V_{x0} \\ V_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7.26}$$

ここで、 P_0 , V_{x0} , V_{y0} が0でない解をもつためには式(2.7.26)の左辺行列 \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ が0となる必要があり、これは次式で表される。

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + \left(-\frac{ck'_x}{\omega} - \sin \theta\right) \cdot 0 \cdot \frac{ck'_y}{\omega} + \left(-\frac{ck'_y}{\omega}\right) \cdot \left(\frac{ck'_x}{\omega} + \sin \theta\right) \cdot 0 \\
&\quad - \left(-\frac{ck'_y}{\omega}\right) \cdot (-1) \cdot \frac{ck'_y}{\omega} - 0 \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot \left(-\frac{ck'_x}{\omega} - \sin \theta\right) \cdot \left(\frac{ck'_x}{\omega} + \sin \theta\right) \\
&= 1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_y'^2 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_x'^2 - 2\left(\frac{c}{\omega}\right) k'_x \sin \theta - \sin^2 \theta = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_y'^2 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_x'^2 - 2\left(\frac{c}{\omega}\right) k'_x \sin \theta - \sin^2 \theta = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_y'^2 - k_x'^2 - 2k'_x \sin \theta \left(\frac{\omega}{c}\right) - \sin^2 \theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin^2 \theta - 1) \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + 2k'_x \sin \theta \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right) + k_x'^2 + k_y'^2 = 0 \tag{2.7.27}
\end{aligned}$$

$k'_x = \frac{\omega}{c'} \sin \alpha$, $k'_y = \frac{\omega}{c'} \cos \alpha$ を式(2.7.27)に代入すると次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
&(\sin^2 \theta - 1) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega}{c'} \sin \alpha\right) \sin \theta \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right) + \left(\frac{\omega}{c'} \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{\omega}{c'} \cos \alpha\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{c}{c'}\right)^2 + 2 \sin \alpha \sin \theta \cdot \left(\frac{c}{c'}\right) + \sin^2 \theta - 1 = 0 \tag{2.7.28}
\end{aligned}$$

この解は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{c'}{c} &= \frac{2}{-2 \sin \alpha \sin \theta \pm \sqrt{(2 \sin \alpha \sin \theta)^2 - 4(\sin^2 \theta - 1)}} \\
&\Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{1}{-\sin \alpha \sin \theta \pm \sqrt{\sin^2 \theta (\sin^2 \alpha - 1) + 1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{1}{-\sin \alpha \sin \theta \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}} \tag{2.7.29}
\end{aligned}$$

入射角 θ が特定の値であったとしても、伝搬角 α は様々な値をとる。 $\theta < \pi/2$ のとき、式(2.7.29)の+側, -側をそれぞれとった際の c' を c^+ , c^- とおくと主な伝搬角 ($\alpha=0, \pi/2, 3\pi/2$) に沿った c と c' の割合は表 2.7.1 のようになる。

α [rad]	0	$\pi/2$	$3\pi/2$
c^+/c [-]	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{1}{1-\sin \theta}$	$\frac{1}{1+\sin \theta}$
c^-/c [-]	$\frac{1}{-\cos \theta}$	$\frac{1}{-1-\sin \theta}$	$\frac{1}{-1+\sin \theta}$

図 2.7.1 は $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad] のときの式(2.7.29)で表される c'/c を示したものである。角度の軸は伝搬角 α [rad] であり、真上方向が $\alpha=0$ である。黒の実線で $\theta=0$ 、赤の点線で $\theta=\pi/6$ 、青の破線で $\theta=\pi/4$ 、緑の一点鎖線で $\theta=\pi/3$ を表す。図 2.7.1 (a) より c^+/c は入射角 $\theta=0$ のときは α によらず全方向に等しいが、 $0<\theta<\pi/2$ のときは c^+/c は α に依存して異なることがわかる。 $0<\theta<\pi/2$ において c^+/c はどの入射角でも $\alpha=\pi/2$ のときに最大で $\alpha=3\pi/2$ のときに最小となる。入射角が増えるほど最小値はわずかに小さく、最大値は明らかに大きくなり、その結果 c^+/c は半径が大きく中心が 0 から離れ偏った円となる。すなわち、変換音場では入射角が大きいほど分散誤差が大きくなるといえる。また、図 2.7.1 (b) の c^-/c については c^+/c を $\alpha=0$ と π で結ばれる軸（以降、 y 軸と呼ぶ）に関して対称にした結果となっており、解を 2 つもつということが示された。

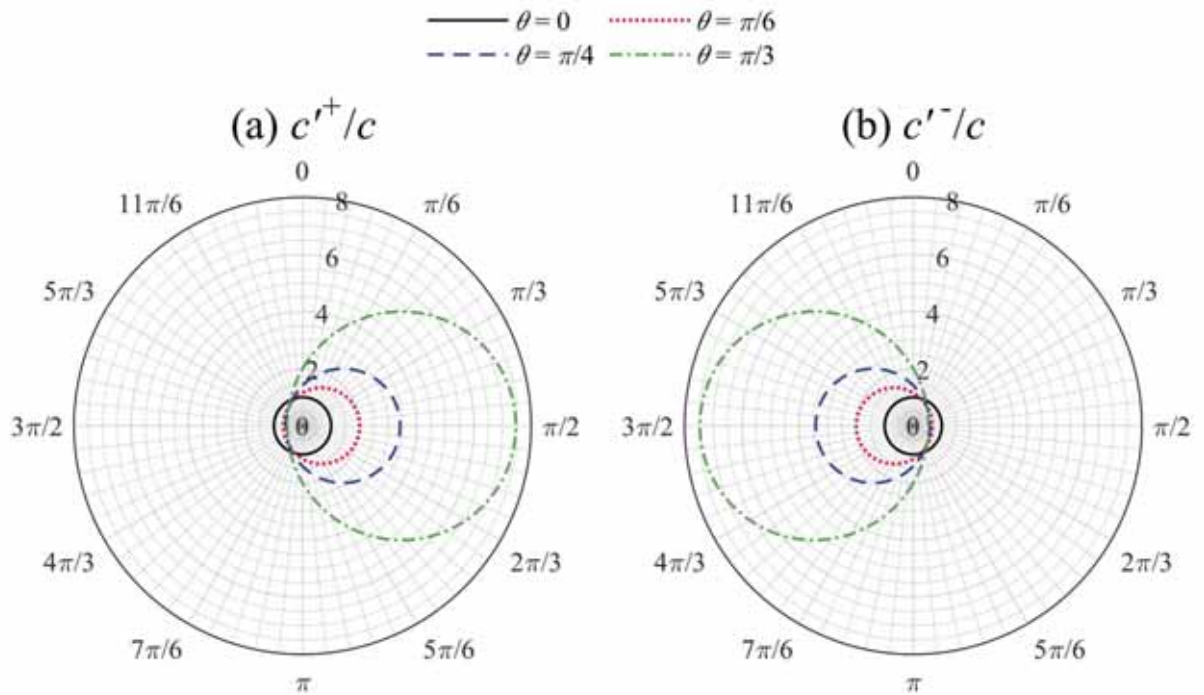


図 2.7.1 変換音場での c と c' の割合

2.7.3 理論的な安定性解析

空間離散化幅が $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ のとき、通常音場の安定条件の式は(2.7.30)で表される。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{2}c} \quad (2.7.30)$$

変換音場では式(2.7.30)の c を式(2.7.29)で得られる最大の c' の絶対値に置き換えたときの安定条件の式を満たす Δt を設定しなければならない。 c' の絶対値が最大となるのは $\alpha = \pi/2$ のときの

$c'^+ = \frac{c}{1 - \sin \theta}$ と $\alpha = 3\pi/2$ のときの $c'^- = \frac{c}{-1 + \sin \theta}$ ，すなわち $c' = \frac{c}{1 - \sin \theta}$ であるため、変換音場の安定条件は次式のようになる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{c}{1 - \sin \theta} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{(1 - \sin \theta) \Delta h}{\sqrt{2}c} \quad (2.7.31)$$

$\Delta h = 5.0 \times 10^{-2}$ [m] のとき、各入射角の時間離散化幅はそれぞれ表 2.7.2 のように決定すると式(2.7.31)を満たす。

表 2.7.2 主な入射角の時間離散化幅

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s]	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}

変換音場では入射角が大きくなると安定条件は厳しくなり、 $\theta > 0$ のときはどの入射角においても通常音場の $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ [s] と比べて細かい時間離散化幅が必要であるということがわかる。2.5章の Δt は表 2.7.2 のように設定した。

2.7.4 時間項を用いた数値的な安定性解析

2.7.2 節は解析的な分散性, 2.7.3 節は解析的な安定性について調査したが, 本節では差分スキームに平面波を入力し, 数値的な分散性, および, 安定性について検討する。変換音場の支配式(2.7.9), (2.7.12)~(2.7.15)を離散化するとそれぞれ次式のようなになる。

$$\frac{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{\Delta t} = -c \frac{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = V_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)\} \quad (2.7.32)$$

$$\frac{P^{a^{n+1}}(i, j) - P^{a^n}(i, j)}{\Delta t} = -c \frac{V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i-0.5, j)}{\Delta x}$$

$$-c \frac{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow P^{a^{n+1}}(i, j) = P^{a^n}(i, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - V_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\}$$

$$-c \frac{\Delta t}{\Delta y} \{V_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - V_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \quad (2.7.33)$$

$$\frac{V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) - V_x^{a^{n-0.5}}(i+0.5, j)}{\Delta t} = -c \frac{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) = V_x^{a^{n-0.5}}(i+0.5, j) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)\} \quad (2.7.34)$$

$$P^n(i, j) = P^{a^n}(i, j) + \frac{V_x^n(i+0.5, j) + V_x^n(i-0.5, j)}{2} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow P^n(i, j) = P^{a^n}(i, j) + \frac{\sin \theta}{2} \{V_x^n(i+0.5, j) + V_x^n(i-0.5, j)\} \quad (2.7.35)$$

$$V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) + \frac{P^{n+0.5}(i+1, j) + P^{n+0.5}(i, j)}{2} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow V_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = V_x^{a^{n+0.5}}(i+0.5, j) + \frac{\sin \theta}{2} \{P^{n+0.5}(i+1, j) + P^{n+0.5}(i, j)\} \quad (2.7.36)$$

ここで, 離散化された変換音場の式(2.7.32)~(2.7.36)に平面波を入力する。伝搬角は α で表すが, 平面波の入力後の時間進行による変化を調査するため, 本節では 2.7.2 節とは異なり位相速度は通常音場の c を用いる。このとき, 波数を $k'' = \frac{\omega}{c}$ とおくと, x, y 方向成分は $k_x'' = \frac{\omega}{c} \sin \alpha$,

$k_y'' = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$ のようにそれぞれ表される。空間移行を $e^{ik_x''x}$, $e^{ik_y''y}$, 時間進行を $e^{-i\omega t}$ とするとグリッド点 $(i\Delta x, j\Delta y)$, 離散時間 $n\Delta t$ において $P_0, P_0^a, V_{x0}, V_{x0}^a, V_{y0}$ を初期値とした音圧の次のような平面波の関係を仮定できる。

$$P^n(i, j) = P_0 e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''j\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \quad (2.7.37)$$

$$P^{an}(i, j) = P_0^a e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''j\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \quad (2.7.38)$$

さらに、粒子速度についても次のような関係を仮定する。

$$V_x^n(i+0.5, j) = V_{x0} e^{ik_x''(i+0.5)\Delta x} e^{ik_y''j\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \quad (2.7.39)$$

$$V_x^{an}(i+0.5, j) = V_{x0}^a e^{ik_x''(i+0.5)\Delta x} e^{ik_y''j\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \quad (2.7.40)$$

$$V_y^n(i, j+0.5) = V_{y0} e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''(j+0.5)\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \quad (2.7.41)$$

式(2.7.37), (2.7.41)を式(2.7.32)に代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned} V_{y0} e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''(j+0.5)\Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} &= V_{y0} e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''(j+0.5)\Delta y} e^{-i\omega(n-0.5)\Delta t} \\ &\quad - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ P_0 e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''(j+1)\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} - P_0 e^{ik_x''i\Delta x} e^{ik_y''j\Delta y} e^{-i\omega n\Delta t} \right\} \\ \Leftrightarrow V_{y0} e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} &= V_{y0} e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(P_0 e^{ik_y'' \frac{\Delta y}{2}} - P_0 e^{-ik_y'' \frac{\Delta y}{2}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} \right) V_{y0} &- c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(e^{ik_y'' \frac{\Delta y}{2}} - e^{-ik_y'' \frac{\Delta y}{2}} \right) P_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

ここで、オイラーの公式より次式が成り立つ。

$$e^{ix} - e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x) = 2i \sin x \quad (2.7.43)$$

$r_a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, $T_x = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ とおき、式(2.7.43)の関係を式(2.7.42)に用いると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} 2i \sin \frac{\omega \Delta t}{2} V_{y0} - r_a T_x 2i \sin \frac{k_y'' \Delta y}{2} P_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_x} V_{y0} - r_a \sin \frac{k_y'' \Delta y}{2} P_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7.44)$$

$\Lambda = \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_x}$, $S_y = \sin \frac{k_y'' \Delta y}{2}$ をそれぞれ定義し、式(2.7.44)に代入すると次式のようにになる。

$$\Lambda V_{y0} - r_a S_y P_0 = 0 \quad (2.7.45)$$

式(2.7.38), (2.7.39), (2.7.41)を式(2.7.33)に代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& P_0^a e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega(n+1)\Delta t} \\
&= P_0^a e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega n \Delta t} \\
&\quad -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(V_{x0} e^{ik_x^*(i+0.5)\Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} - V_{x0} e^{ik_x^*(i-0.5)\Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} \right) \\
&\quad -c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(V_{y0} e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^*(j+0.5)\Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} - V_{y0} e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^*(j-0.5)\Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} \right) \\
&\Leftrightarrow P_0^a e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} = P_0^a e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{x0} \left(e^{ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} - e^{-ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} \right) - c \frac{\Delta t}{\Delta y} V_{y0} \left(e^{ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} - e^{-ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} \right) P_0^a - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} - e^{-ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} \right) V_{x0} - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(e^{ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} - e^{-ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} \right) V_{y0} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2i \sin \frac{\omega \Delta t}{2} P_0^a - T_x 2i \sin \frac{k_x^* \Delta x}{2} V_{x0} - r_a T_x 2i \sin \frac{k_y^* \Delta y}{2} V_{y0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_x} P_0^a - \sin \frac{k_x^* \Delta x}{2} V_{x0} - r_a \sin \frac{k_y^* \Delta y}{2} V_{y0} = 0 \tag{2.7.46}
\end{aligned}$$

ここで、 $S_x = \sin \frac{k_x^* \Delta x}{2}$ を定義し、 Λ , S_x , S_y を式(2.7.46)に代入すると次式のようになる。

$$\Lambda P_0^a - S_x V_{x0} - r_a S_y V_{y0} = 0 \tag{2.7.47}$$

式(2.7.37), (2.7.40)を式(2.7.34)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& V_{x0}^a e^{ik_x^*(i+0.5)\Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega(n+0.5)\Delta t} = V_{x0}^a e^{ik_x^*(i+0.5)\Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega(n-0.5)\Delta t} \\
&\quad -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ P_0 e^{ik_x^*(i+1)\Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega n \Delta t} - P_0 e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} e^{-i\omega n \Delta t} \right\} \\
&\Leftrightarrow V_{x0}^a e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} = V_{x0}^a e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(P_0 e^{ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} - P_0 e^{-ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} - e^{-i\omega \frac{\Delta t}{2}} \right) V_{x0}^a - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} - e^{-ik_x^* \frac{\Delta x}{2}} \right) P_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2i \sin \frac{\omega \Delta t}{2} V_{x0}^a - T_x 2i \sin \frac{k_x^* \Delta x}{2} P_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{T_x} V_{x0}^a - \sin \frac{k_x^* \Delta x}{2} P_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \Lambda V_{x0}^a - S_x P_0 = 0 \tag{2.7.48}
\end{aligned}$$

式(2.7.37)~(2.7.39)を式(2.7.35)に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
P_0 e^{ik_x'' \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} &= P_0^a e^{ik_x'' \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{2} \left(V_{x0} e^{ik_x''(i+0.5) \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} + V_{x0} e^{ik_x''(i-0.5) \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} \right) \\
\leftrightarrow P_0 - P_0^a - \frac{\sin \theta}{2} \left(e^{ik_x'' \frac{\Delta x}{2}} + e^{-ik_x'' \frac{\Delta x}{2}} \right) V_{x0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.49}$$

ここで、オイラーの公式より次式が成り立つ。

$$e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x) = 2 \cos x \tag{2.7.50}$$

式(2.7.50)の関係を式(2.7.49)に用いると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
P_0 - P_0^a - \frac{\sin \theta}{2} 2 \cos \frac{k_x'' \Delta x}{2} V_{x0} &= 0 \\
\leftrightarrow P_0 - P_0^a - \sin \theta \cos \frac{k_x'' \Delta x}{2} V_{x0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.51}$$

$C_x = \cos \frac{k_x'' \Delta x}{2}$ を定義し、式(2.7.51)に代入すると次式のようになる。

$$P_0 - P_0^a - C_x \sin \theta V_{x0} = 0 \tag{2.7.52}$$

式(2.7.37), (2.7.39), (2.7.40)を式(2.7.36)に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
V_{x0} e^{ik_x''(i+0.5) \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} &= V_{x0}^a e^{ik_x''(i+0.5) \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{2} \left(P_0 e^{ik_x''(i+1) \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} + P_0 e^{ik_x'' i \Delta x} e^{ik_y'' j \Delta y} e^{-i \omega \Delta t} \right) \\
\leftrightarrow V_{x0} - V_{x0}^a - \frac{\sin \theta}{2} \left(e^{ik_x'' \frac{\Delta x}{2}} + e^{-ik_x'' \frac{\Delta x}{2}} \right) P_0 &= 0 \\
\leftrightarrow V_{x0} - V_{x0}^a - \sin \theta \cos \frac{k_x'' \Delta x}{2} P_0 &= 0 \\
\leftrightarrow V_{x0} - V_{x0}^a - C_x \sin \theta P_0 &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.53}$$

以上より、式(2.7.45), (2.7.47), (2.7.48), (2.7.52), (2.7.53)の関係は次のような行列の式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} -r_a S_y & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \Lambda & -S_x & 0 & -r_a S_y \\ -S_x & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_0^a \\ V_{x0} \\ V_{x0}^a \\ V_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7.54}$$

ここで、 P_0 , P_0^a , V_{x0} , V_{x0}^a , V_{y0} が 0 でない解をもつためには式(2.7.54)の左辺行列 \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ が 0 となる必要があり、これは次式で表される。

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} -r_a S_y & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \Lambda & -S_x & 0 & -r_a S_y \\ -S_x & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -r_a S_y \cdot \mathbf{A}_{11} - 0 \cdot \mathbf{A}_{12} + 0 \cdot \mathbf{A}_{13} - 0 \cdot \mathbf{A}_{14} + \Lambda \cdot \mathbf{A}_{15} \\
&= -r_a S_y \cdot \mathbf{A}_{11} + \Lambda \cdot \mathbf{A}_{15} \\
&= -r_a S_y \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -S_x & 0 & -r_a S_y \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \Lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & \Lambda & -S_x & 0 \\ -S_x & 0 & 0 & \Lambda \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.7.55) \\
\text{ここで, } \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \Lambda & -S_x & 0 & -r_a S_y \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda & -S_x & 0 \\ -S_x & 0 & 0 & \Lambda \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{とおくと式(2.7.55)は}
\end{aligned}$$

次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= -r_a S_y \cdot |\mathbf{B}| + \Lambda \cdot |\mathbf{C}| \\
&= -r_a S_y (-0 \cdot \mathbf{B}_{21} + 0 \cdot \mathbf{B}_{22} - \Lambda \cdot \mathbf{B}_{23} + 0 \cdot \mathbf{B}_{24}) + \Lambda (S_x \cdot \mathbf{C}_{21} + 0 \cdot \mathbf{C}_{22} - 0 \cdot \mathbf{C}_{23} + \Lambda \cdot \mathbf{C}_{24}) \\
&= r_a \Lambda S_y \cdot \mathbf{B}_{23} + \Lambda S_x \cdot \mathbf{C}_{21} + \Lambda^2 \cdot \mathbf{C}_{24} \\
&= r_a \Lambda S_y \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -S_x & -r_a S_y \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \Lambda S_x \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -S_x & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \Lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \Lambda & -S_x \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.7.56) \\
\text{さらに, } \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \Lambda & -S_x & -r_a S_y \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Lambda & -S_x & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda & -S_x \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{とお}
\end{aligned}$$

くと式(2.7.56)は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= r_a \Lambda S_y \cdot |\mathbf{D}| + \Lambda S_x \cdot |\mathbf{E}| + \Lambda^2 \cdot |\mathbf{F}| \\
&= r_a \Lambda S_y (0 \cdot \mathbf{D}_{31} + 1 \cdot \mathbf{D}_{32} + 0 \cdot \mathbf{D}_{33}) + \Lambda S_x (0 \cdot \mathbf{E}_{31} + 1 \cdot \mathbf{E}_{32} + 1 \cdot \mathbf{E}_{33}) \\
&\quad + \Lambda^2 (C_x \sin \theta \cdot \mathbf{F}_{31} - 0 \cdot \mathbf{F}_{32} - 1 \cdot \mathbf{F}_{33}) \\
&= r_a \Lambda S_y \cdot \mathbf{D}_{32} + \Lambda S_x \cdot \mathbf{E}_{32} + \Lambda S_x \cdot \mathbf{E}_{33} + \Lambda^2 C_x \sin \theta \cdot \mathbf{F}_{31} - \Lambda^2 \cdot \mathbf{F}_{33} \\
&= r_a \Lambda S_y \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -aS_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \Lambda S_x \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \Lambda S_x \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -S_x \\ 1 & C_x \sin \theta \end{vmatrix} \\
&\quad + \Lambda^2 C_x \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & -S_x \\ 1 & C_x \sin \theta \end{vmatrix} - \Lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \Lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= r_a \Lambda S_y \{ \Lambda \cdot 0 - (-aS_y) \cdot 1 \} + \Lambda S_x (\Lambda \cdot 0 - 0 \cdot 1) + \Lambda S_x \{ \Lambda \cdot C_x \sin \theta - (-S_x) \cdot 1 \} \\
&\quad + \Lambda^2 C_x \sin \theta \{ \Lambda \cdot C_x \sin \theta - (-S_x) \cdot 1 \} - \Lambda^2 \{ 0 \cdot 1 - \Lambda \cdot (-1) \} \\
&= a^2 \Lambda S_y^2 + \Lambda^2 C_x S_x \sin \theta + \Lambda S_x^2 + \Lambda^3 C_x^2 \sin^2 \theta + \Lambda^2 C_x S_x \sin \theta - \Lambda^3 \\
&= -\Lambda \left\{ (1 - C_x^2 \sin^2 \theta) \cdot \Lambda^2 - 2C_x S_x \sin \theta \cdot \Lambda - (S_x^2 + r_a^2 S_y^2) \right\} \tag{2.7.57}
\end{aligned}$$

$\Lambda \neq 0$ のとき、式(2.7.57)より次式が成り立つ。

$$(1 - C_x^2 \sin^2 \theta) \cdot \Lambda^2 - 2C_x S_x \sin \theta \cdot \Lambda - (S_x^2 + r_a^2 S_y^2) = 0 \tag{2.7.58}$$

この解は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{2C_x S_x \sin \theta \pm \sqrt{(-2C_x S_x \sin \theta)^2 + 4(1 - C_x^2 \sin^2 \theta)(S_x^2 + r_a^2 S_y^2)}}{2(1 - C_x^2 \sin^2 \theta)} \\
&= \frac{2C_x S_x \sin \theta \pm \sqrt{4C_x^2 S_x^2 \sin^2 \theta + 4(S_x^2 + r_a^2 S_y^2 - C_x^2 S_x^2 \sin^2 \theta - r_a^2 C_x^2 S_y^2 \sin^2 \theta)}}{2(1 - C_x^2 \sin^2 \theta)} \\
&= \frac{C_x S_x \sin \theta \pm \sqrt{S_x^2 + r_a^2 S_y^2 (1 - C_x^2 \sin^2 \theta)}}{1 - C_x^2 \sin^2 \theta} \tag{2.7.59}
\end{aligned}$$

さて、 $\Lambda T_x = \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$ より $|\Lambda T_x| \leq 1$ である。 $\Delta t > 0$, $\Delta x > 0$, $c > 0$, $T_x > 0$ より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
|\Lambda|_{\max} \cdot T_x &\leq 1 \\
\Leftrightarrow T_x &\leq \frac{1}{|\Lambda|_{\max}} \\
\Leftrightarrow c \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{|\Lambda|_{\max}}
\end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{|\Lambda|_{\max}} \quad (2.7.60)$$

時間離散化幅 Δt はこれを満たすように設定しなければならない。

ここから、 Δt を決定するために $|\Lambda|_{\max}$ を予測する式について検討する。図 2.7.2 は $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ で入射角には依存しないため、どの θ を設定しても同じ値をとる。角度の軸は伝搬角 α [rad] で真上方向が $\alpha=0$ である。図 2.7.2 (a) より $\sin\alpha$ は $\alpha=\pi/2$ のときに最大で $\alpha=3\pi/2$ のときに最小となる。一方、図 2.7.2 (b) より $\cos\alpha$ は $\alpha=0$ のときに最大で $\alpha=\pi$ のときに最小となる。

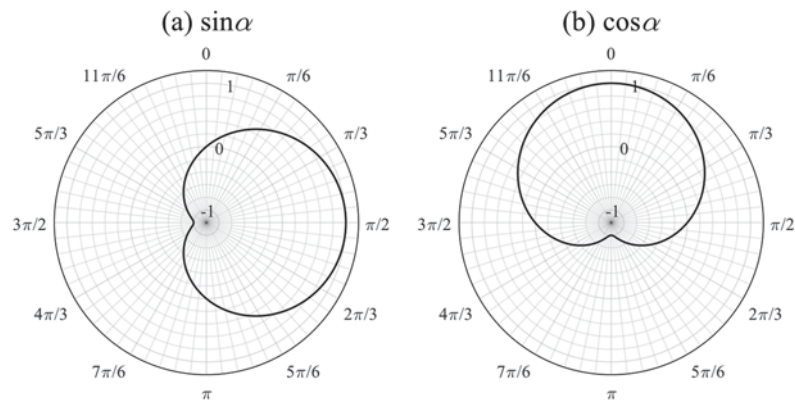


図 2.7.2 変換音場で伝搬角に依存する $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

次に、 k''_x , k''_y について検討する。 k''_x , k''_y はそれぞれ次式のように書き換えられ、周波数に関係し、入射角には依存しないことがわかる。

$$k''_x = \frac{\omega}{c} \sin\alpha = \frac{2\pi f}{c} \sin\alpha \quad (2.7.61)$$

$$k''_y = \frac{\omega}{c} \cos\alpha = \frac{2\pi f}{c} \cos\alpha \quad (2.7.62)$$

図 2.7.3 は式(2.7.61), (2.7.62)で表される k''_x , k''_y である。図中の f は周波数である。図 2.7.3 (a) より k''_x は $\alpha=\pi/2$ のときに最大で $\alpha=3\pi/2$ のときに最小となる。また $\alpha=0$, π のときに $\sin\alpha=0$ となるため 0 になる。図 2.7.4 (b) より k''_y は $\alpha=0$ のときに最大で $\alpha=\pi$ のときに最小となる。また $\alpha=\pi/2$, $3\pi/2$ のときに $\cos\alpha=0$ となるため 0 になる。

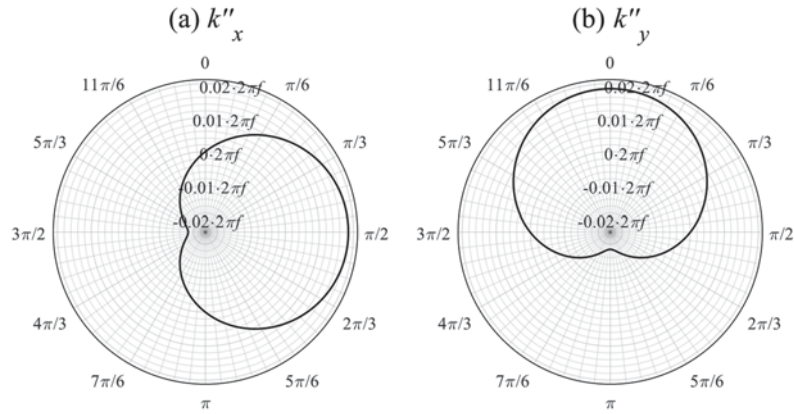


図 2.7.3 変換音場で伝搬角に依存する k''_x , k''_y

S_x , S_y , C_x について検討する。ここから、本節では $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ とおく。 S_x , S_y , C_x は $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ を用いてそれぞれ次のように表される。

$$S_x = \sin \frac{k''_x \Delta x}{2} = \sin \frac{(k'' \sin \alpha) \Delta h}{2} = \sin \frac{\frac{\omega}{c} \Delta h \sin \alpha}{2} = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} \quad (2.7.63)$$

$$S_y = \sin \frac{k''_y \Delta y}{2} = \sin \frac{(k'' \cos \alpha) \Delta h}{2} = \sin \frac{\frac{\omega}{c} \Delta h \cos \alpha}{2} = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \cos \alpha}{c} \right) \pi \right\} \quad (2.7.64)$$

$$C_x = \cos \frac{k''_x \Delta x}{2} = \cos \frac{(k'' \sin \alpha) \Delta h}{2} = \cos \frac{\frac{\omega}{c} \Delta h \sin \alpha}{2} = \cos \left\{ \left(\frac{f \Delta h \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} \quad (2.7.65)$$

波長を λ とおいたとき、 $c = f\lambda$ であるので、式(2.7.63)~(2.7.65)は次式で書き換えることができる。

$$S_x = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \frac{c}{f \lambda} \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \sin \left\{ \left(\frac{\Delta h}{\lambda} \sin \alpha \right) \pi \right\} \quad (2.7.66)$$

$$S_y = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \cos \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \sin \left\{ \left(\frac{f \Delta h \frac{c}{f \lambda} \cos \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \sin \left\{ \left(\frac{\Delta h}{\lambda} \cos \alpha \right) \pi \right\} \quad (2.7.67)$$

$$C_x = \cos \left\{ \left(\frac{f \Delta h \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \cos \left\{ \left(\frac{f \Delta h \frac{c}{f \lambda} \sin \alpha}{c} \right) \pi \right\} = \cos \left\{ \left(\frac{\Delta h}{\lambda} \sin \alpha \right) \pi \right\} \quad (2.7.68)$$

式(2.7.66)~(2.7.68)より S_x , S_y , C_x はいずれも周波数に関係がないことがわかる。図 2.7.4 に $\Delta h/\lambda = 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1$ とおいたときの S_x , S_y , C_x の値を示す。図 2.7.4 (a)より S_x は少なくとも $\Delta h/\lambda \leq 1/2$ で $\alpha = \pi/2$ のときに最大、 $\alpha = 3\pi/2$ のときに最小となっているが、 $\Delta h/\lambda = 1$ では

この関係は成り立たない。またすべての $\Delta h/\lambda$ で $\alpha=0, \pi$ のときに $\sin\alpha=0$ となるため 0 になる。図 2.7.4 (b) より S_y は少なくとも $\Delta h/\lambda \leq 1/2$ で $\alpha=0$ のときに最大、 $\alpha=\pi$ のときに最小となるが、 $\Delta h/\lambda=1$ では成り立たない。すべての $\Delta h/\lambda$ で $\alpha=\pi/2, 3\pi/2$ のときに $\cos\alpha=0$ となるため 0 になる。これらの α に関する傾向は少なくとも $\Delta h/\lambda \leq 1/2$ で図 2.7.3 の k''_x, k''_y と同じである。図 2.7.4 (c) より C_x はすべての $\Delta h/\lambda$ で $\alpha=0, \pi$ のときに $\sin\alpha=0$ となるため最大値 1 となり、 $\alpha=\pi/2, 3\pi/2$ のときに最小となる。

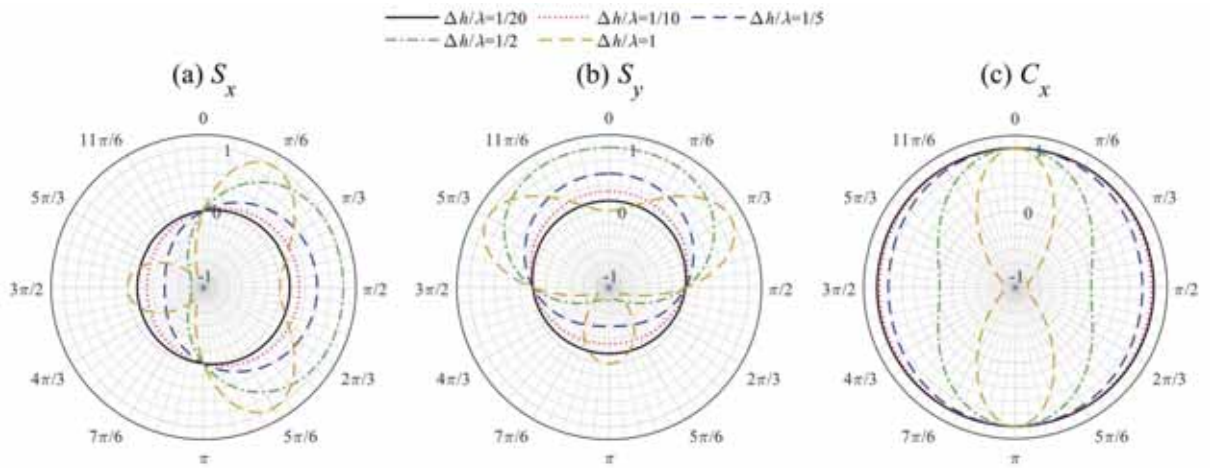


図 2.7.4 変換音場で伝搬角, $\Delta h/\lambda$ に依存する各値

Λ に関して検討する。 $\Delta x=\Delta y=\Delta h$ のとき $r_a=1$ である。さらに、 $\sqrt{S_x^2+S_y^2(1-C_x^2\sin^2\theta)}>0$ より式(2.7.59)の Λ は次式で最大値, 最小値をそれぞれとることになる。

$$\Lambda^+ = \frac{C_x S_x \sin\theta + \sqrt{S_x^2 + S_y^2(1 - C_x^2 \sin^2\theta)}}{1 - C_x^2 \sin^2\theta} \quad (2.7.69)$$

$$\Lambda^- = \frac{C_x S_x \sin\theta - \sqrt{S_x^2 + S_y^2(1 - C_x^2 \sin^2\theta)}}{1 - C_x^2 \sin^2\theta} \quad (2.7.70)$$

式(2.7.60)の評価には式(2.7.69), (2.7.70)の Λ^+ の最大値, Λ^- の最小値が必要となる。 $\theta=0$ のとき, 式(2.7.69), (2.7.70)はそれぞれ $\Lambda^+ = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$, $\Lambda^- = -\sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ となる。 $\Delta h/\lambda=1/20$ とおいたとき Λ^+ , Λ^- はそれぞれ図 2.7.5 (a), (b)のようになる。絶対値をとると Λ^+ と Λ^- は図 2.7.5 (c)のように一致し、 $\alpha=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ で最大、 $\alpha=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ で最小となる。 $\Delta h/\lambda=1/10, 1/5, 1/2, 1$ とおいたときも同様に絶対値をとると Λ^+ と Λ^- は一致する。図 2.7.6 に各 $\Delta h/\lambda$ のときの $|\Lambda|$ を示す。 $\Delta h/\lambda$ はすべての値で $|\Lambda|$ が $\alpha=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ で最大、 $\alpha=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ で最小となる。

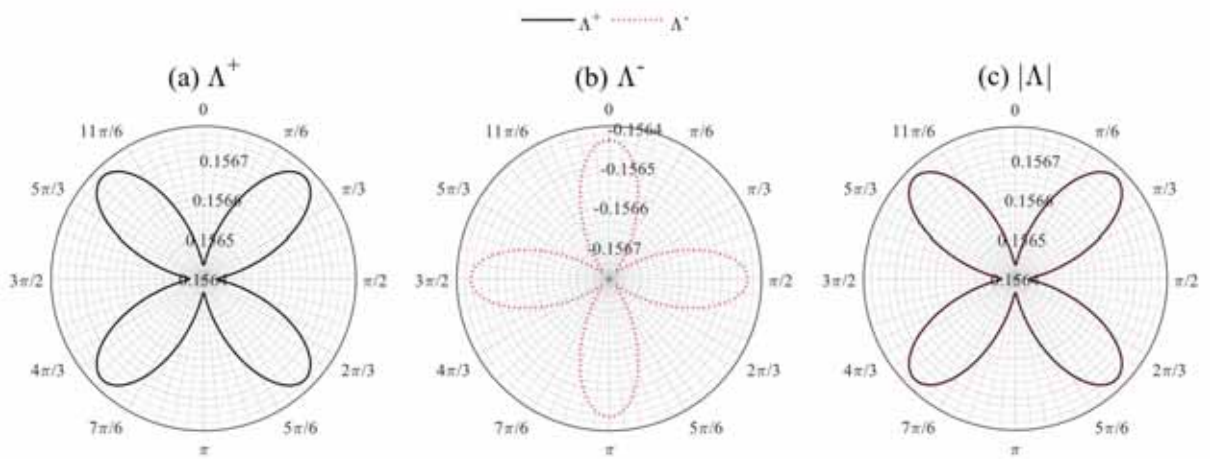


図 2.7.5 変換音場で $\theta=0$ のときの伝搬角に依存する Λ

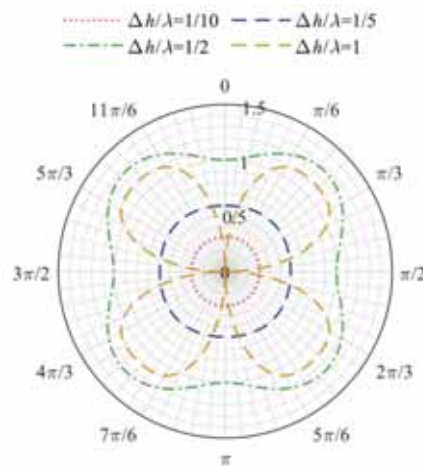


図 2.7.6 変換音場で $\theta=0$ のときの伝搬角, $\Delta h/\lambda$ に依存する $|\Lambda|$

以上を踏まえて, $|\Lambda|_{\max}$ は $\alpha=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ のときに得られる。これらの α を満たすとき, 式(2.7.65), (2.7.66)より $|\Lambda|$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 |\Lambda| &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \\
 \Leftrightarrow |\Lambda| &= \sqrt{\sin^2 \frac{k_x'' \Delta h}{2} + \sin^2 \frac{k_y'' \Delta h}{2}} \\
 \Leftrightarrow |\Lambda| &= \sqrt{\sin^2 \frac{k'' \sin \alpha \Delta h}{2} + \sin^2 \frac{k'' \cos \alpha \Delta h}{2}} \\
 \Leftrightarrow |\Lambda| &= \sqrt{2} \sin \frac{k'' \Delta h}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{2.7.71}$$

$\left| \sin \frac{k'' \Delta h}{2\sqrt{2}} \right| \leq 1$ より $|\Lambda|_{\max}$ は次式で表される。

$$|\Lambda|_{\max} = \sqrt{2} \quad (2.7.72)$$

式(2.7.72)を式(2.7.60)に代入すると $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ のとき次のような $\theta = 0$ のときの安定条件の式が得られる。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{2}c} \quad (2.7.73)$$

式(2.4.12), (2.7.73)より変換音場において $\theta = 0$ のときの安定条件は通常音場の安定条件と一致することが確認された。

さて、その他の入射角の安定条件も検討する必要がある。図 2.7.7 (a), (d), (g)は $\Delta h/\lambda = 1/20$ で $\theta = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ のときの式(2.7.69)で表される Λ^+ を、図 2.7.7 (b), (e), (h)は式(2.7.70)で表される Λ^- を示したものである。これらの絶対値をとると図 2.7.7 (c), (f), (i)のようになる。 $\theta = 0$ のときとは異なり Λ^+ と Λ^- の絶対値は一致しないが、 y 軸に関して対称となる。 $|\Lambda|_{\max}$ は $\alpha = \pi/2$ のときの $|\Lambda^+|$ と $\alpha = 3\pi/2$ のときの $|\Lambda^-|$ でこれらは値が等しい。図 2.7.8 に $\Delta h/\lambda = 1/10, 1/5, 1/2, 1, \theta = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ のときの $|\Lambda|$ を示す。これらも y 軸に関して対称となるが、 $\Delta h/\lambda > 1/5$ で $|\Lambda|_{\max}$ をとる α の予測は困難である。少なくとも $\Delta h/\lambda \leq 1/10$ で $|\Lambda|_{\max}$ は $\alpha = \pi/2$ のときの $|\Lambda^+|$ と $\alpha = 3\pi/2$ のときに得られる。

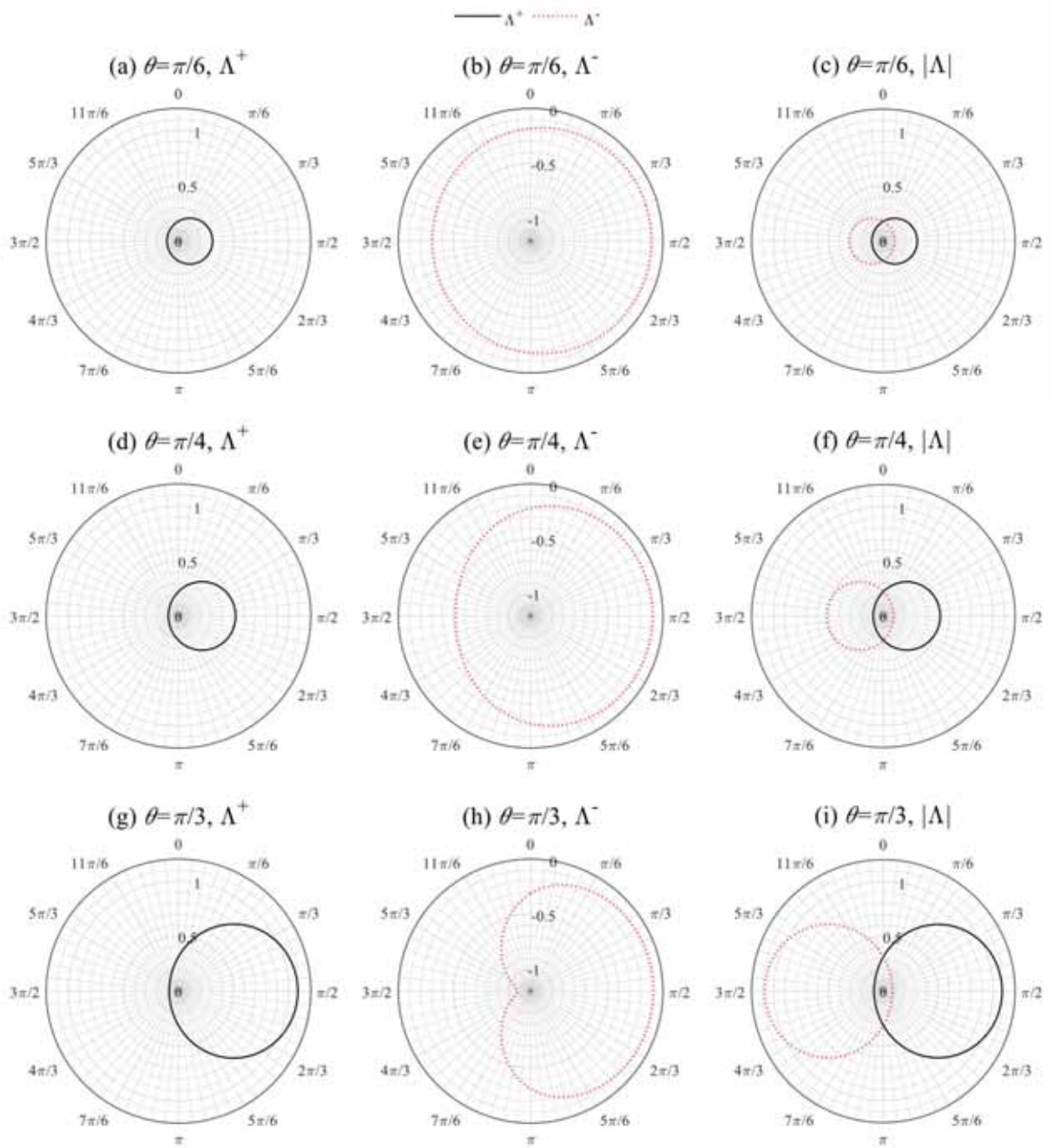


図 2.7.7 変換音場で入射角 θ , 伝搬角 α に依存する Λ

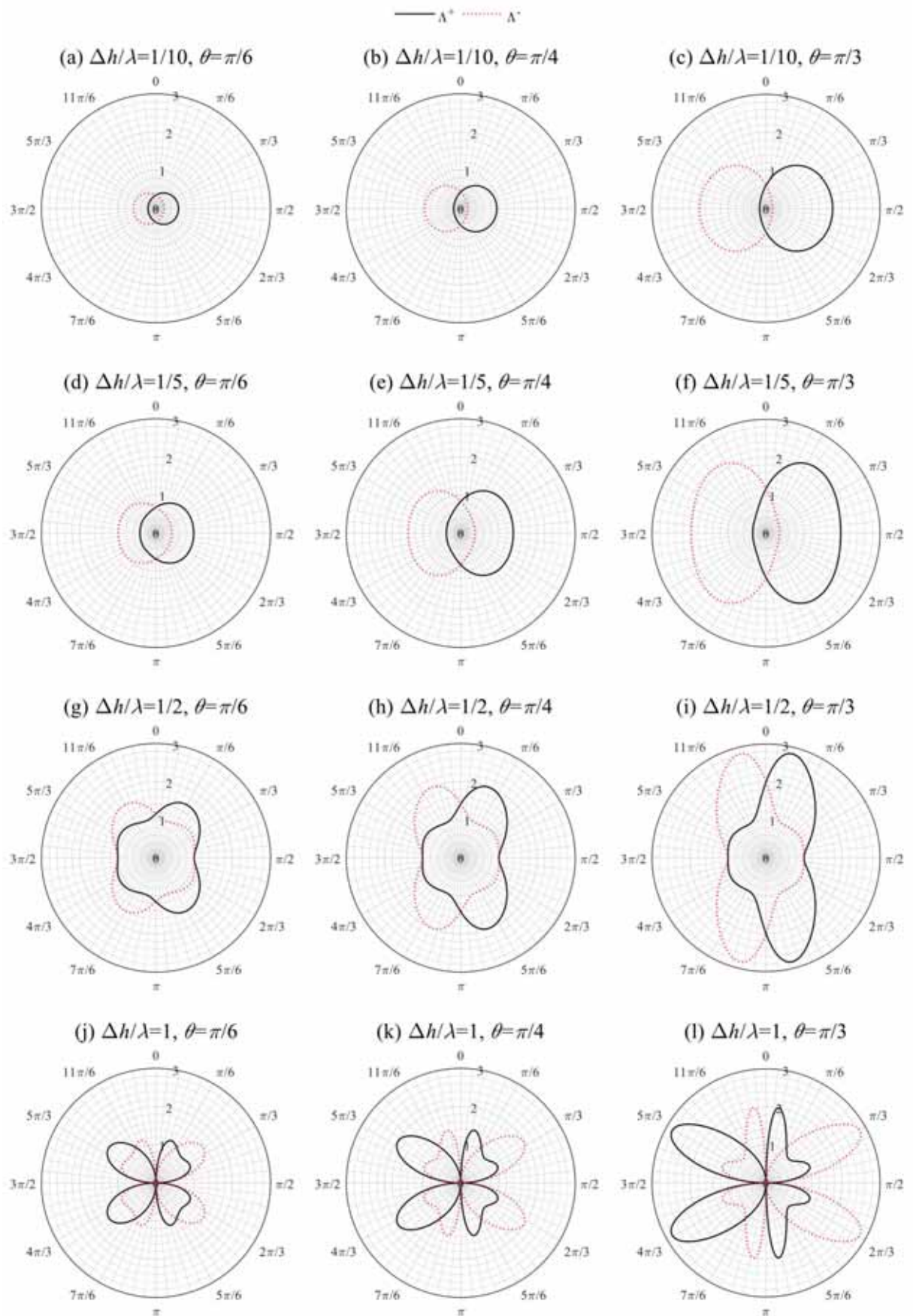


図 2.7.8 変換音場で入射角，伝搬角に依存する $|\Lambda|$

よって $|\Lambda|_{\max}$ は少なくとも $\Delta h/\lambda \leq 1/10$ で $\alpha = \pi/2$ のときの Λ^+ を用いて予測することができる。
 $\alpha = \pi/2$ のときの Λ^+ から求められる $|\Lambda|_{\max}$ は式(2.7.63)~(2.7.65), (2.7.69)より次式で表される。

$$\begin{aligned}
|\Lambda|_{\max} &= \frac{\cos \frac{k''\Delta h}{2} \sin \frac{k''\Delta h}{2} \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \frac{k''\Delta h}{2} + \sin^2 \theta \left(1 - \cos^2 \frac{k''\Delta h}{2} \sin^2 \theta\right)}}{1 - \cos^2 \frac{k''\Delta h}{2} \sin^2 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{\cos \frac{k''\Delta h}{2} \sin \frac{k''\Delta h}{2} \sin \theta + \sin \frac{k''\Delta h}{2}}{1 - \cos^2 \frac{k''\Delta h}{2} \sin^2 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{\sin \frac{k''\Delta h}{2} \left(\cos \frac{k''\Delta h}{2} \sin \theta + 1 \right)}{1 - \cos^2 \frac{k''\Delta h}{2} \sin^2 \theta} \tag{2.7.74}
\end{aligned}$$

さらに、図 2.7.9 に $\theta = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ における $0 \leq k''\Delta h/2 \leq 2\pi$ としたときの式(2.7.74)の $|\Lambda|_{\max}$ を示す。角度の値は $k''\Delta h/2$ である。図 2.7.9 より Λ^+ は $\theta = \pi/6$ で $k''\Delta h = \pi/3$ のとき、 $\theta = \pi/4$ で $k''\Delta h = \pi/4$ のとき、 $\theta = \pi/3$ で $k''\Delta h = \pi/6$ のときに最大値をとる。すなわち、入射角が $0 < \theta < \pi/2$ のとき $k''\Delta h = \pi/2 - \theta$ で最大値をとり、その際、 $|\Lambda|_{\max}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
|\Lambda|_{\max} &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta + 1 \right\}}{1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin^2 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{\cos \theta (\sin \theta \cdot \sin \theta + 1)}{1 - \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{\cos \theta (\sin^2 \theta + 1)}{1 - \sin^4 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\
\leftrightarrow |\Lambda|_{\max} &= \frac{1}{\cos \theta} \tag{2.7.75}
\end{aligned}$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta h$ としたとき式(2.7.75)を式(2.7.60)に代入すると次のような $0 < \theta < \pi/2$ のときの安定条件の式が得られる。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{c} \cos \theta \tag{2.7.76}$$

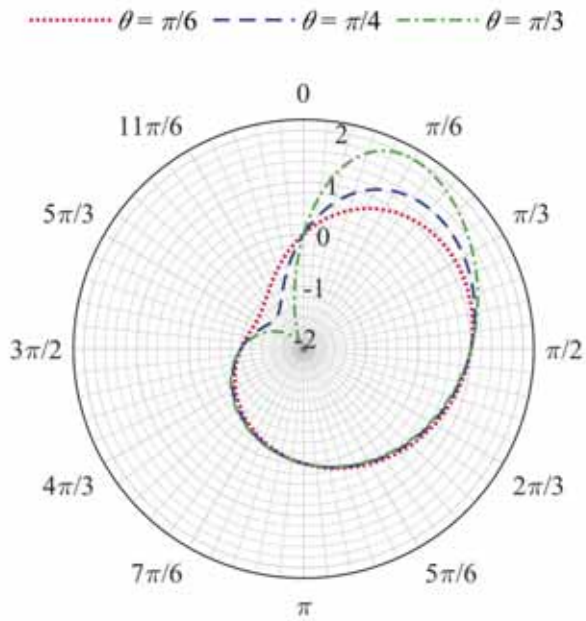


図 2.7.9 変換音場で $\alpha=\pi/2$ のときの k'' , Δh に依存する Λ^+ (角度の値は $k''\Delta h/2$)

空間離散化幅が $\Delta x=\Delta y=\Delta h=5.0\times 10^{-2}$ [m] のとき、各入射角の時間離散化幅 Δt はそれぞれ表 2.7.3 のように決定すると式(2.7.73), (2.7.76)を満たす。表には 2.7.3 節で設定した Δt もあわせて記す。

表 2.7.3 主な入射角の時間離散化幅

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s] (2.7.3 節)	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
Δt [s] (2.7.4 節)	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}

2.7.3 節と比較すると安定条件は大幅に緩んでいることが見て取れる。

2.7.5 振幅の増幅率を用いた数値的な安定性解析

2.7.4節と同様に離散化した変換音場の支配式に平面波を入力して安定条件を数値的に解析する。ここで、複素振幅の増幅率 ζ を平面波の表現に用いる。理論的には 2.7.4 節で定義したように $\zeta = e^{-i\alpha}$ であるが、本節では ζ を未知数とし、次のような関係を仮定する。

$$P^n(i, j) = P_0 e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} \zeta^n \quad (2.7.77)$$

$$P^{a^n}(i, j) = P_0^a e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} \zeta^n \quad (2.7.78)$$

$$V_x^n(i+0.5, j) = V_{x0} e^{ik_x^* (i+0.5) \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} \zeta^n \quad (2.7.79)$$

$$V_x^{a^n}(i+0.5, j) = V_{x0}^a e^{ik_x^* (i+0.5) \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} \zeta^n \quad (2.7.80)$$

$$V_y^n(i, j+0.5) = V_{y0} e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* (j+0.5) \Delta y} \zeta^n \quad (2.7.81)$$

式(2.7.77), (2.7.81)を式(2.7.32)に代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned} V_{y0} e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* (j+0.5) \Delta y} \zeta^{(n+0.5)} &= V_{y0} e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* (j+0.5) \Delta y} \zeta^{(n-0.5)} \\ &\quad - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ P_0 e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* (j+1) \Delta y} \zeta^n - P_0 e^{ik_x^* i \Delta x} e^{ik_y^* j \Delta y} \zeta^n \right\} \\ \Leftrightarrow V_{y0} \zeta^{\frac{1}{2}} &= V_{y0} \zeta^{-\frac{1}{2}} - c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(P_0 e^{ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} - P_0 e^{-ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}} \right) V_{y0} &- c \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(e^{ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} - e^{-ik_y^* \frac{\Delta y}{2}} \right) P_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}} \right) V_{y0} &- r_a T_x 2i \sin \frac{k_y^* \Delta y}{2} P_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}} \right) V_{y0} &- i 2 r_a T_x S_y P_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.7.82)$$

ここで、 $Z = \zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}$ とおき式(2.7.82)に代入すると次式のようになる。

$$Z V_{y0} - i 2 r_a T_x S_y P_0 = 0 \quad (2.7.83)$$

同様に次式が得られる。

$$Z P_0^a - i 2 T_x S_x V_{x0} - i 2 r_a T_x S_y V_{y0} = 0 \quad (2.7.84)$$

$$Z V_{x0}^a - i 2 T_x S_x P_0 = 0 \quad (2.7.85)$$

$$P_0 - P_0^a - C_x \sin \theta V_{x0} = 0 \quad (2.7.86)$$

$$V_{x0} - V_{x0}^a - C_x \sin \theta P_0 = 0 \quad (2.7.87)$$

式(2.7.83)~(2.7.87)の関係は次のような行列の式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} -i2r_a T_x S_y & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & Z & -i2T_x S_x & 0 & -i2r_a T_x S_y \\ -i2T_x S_x & 0 & 0 & Z & 0 \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_0^a \\ V_{x0} \\ V_{x0}^a \\ V_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.88)$$

ここで、 P_0 , P_0^a , V_{x0} , V_{x0}^a , V_{y0} が 0 でない解をもつためには式(2.7.88)の左辺行列 \mathbf{A}' の行列式 $|\mathbf{A}'|$ が 0 となる必要があり、これは次式で表される。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}'| &= \begin{vmatrix} -i2r_a T_x S_y & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & Z & -i2T_x S_x & 0 & -i2r_a T_x S_y \\ -i2T_x S_x & 0 & 0 & Z & 0 \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -i2r_a T_x S_y \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2T_x S_x & 0 & -i2r_a T_x S_y \\ 0 & 0 & Z & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + Z \cdot \begin{vmatrix} 0 & Z & -i2T_x S_x & 0 \\ -i2T_x S_x & 0 & 0 & Z \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= i2r_a Z T_x S_y \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2T_x S_x & -i2r_a T_x S_y \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + i2Z T_x S_x \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2T_x S_x & 0 \\ 1 & C_x \sin \theta & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + Z^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & Z & -i2T_x S_x \\ -1 & 1 & C_x \sin \theta \\ C_x \sin \theta & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i2r_a Z T_x S_y \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2r_a T_x S_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + i2Z T_x S_x \cdot \begin{vmatrix} Z & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + i2Z T_x S_x \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2T_x S_x \\ 1 & C_x \sin \theta \end{vmatrix} \\ &\quad + Z^2 C_x \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} Z & -i2T_x S_x \\ 1 & C_x \sin \theta \end{vmatrix} - Z^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & Z \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -4r_a^2 Z T_x^2 S_y^2 + i2Z^2 T_x C_x S_x \sin \theta - 4Z T_x^2 S_x^2 + Z^3 C_x^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + i2Z^2 T_x C_x S_x \sin \theta - Z^3 \\ &= -Z \left\{ (1 - C_x^2 \sin^2 \theta) \cdot Z^2 - i4T_x C_x S_x \sin \theta \cdot Z + 4T_x^2 (S_x^2 + r_a^2 S_y^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.7.89)$$

$Z \neq 0$ のとき、式(2.7.89)より次式が成り立つ。

$$(1-C_x^2 \sin^2 \theta) \cdot Z^2 - i4T_x C_x S_x \sin \theta \cdot Z + 4T_x^2 (S_x^2 + r_a^2 S_y^2) = 0 \quad (2.7.90)$$

二次方程式(2.7.90)の判別式 D は次のように表される。

$$\begin{aligned} D &= (i4T_x C_x S_x \sin \theta)^2 - 4(1-C_x^2 \sin^2 \theta)4T_x^2 (S_x^2 + r_a^2 S_y^2) \\ \Leftrightarrow D &= 16T_x^2 (-C_x^2 S_x^2 \sin^2 \theta - S_x^2 - r_a^2 S_y^2 + C_x^2 S_x^2 \sin^2 \theta + r_a^2 C_x^2 S_y^2 \sin^2 \theta) \\ \Leftrightarrow D &= 16T_x^2 \{-S_x^2 - r_a^2 S_y^2 (1-C_x^2 \sin^2 \theta)\} \end{aligned} \quad (2.7.91)$$

$C_x \leq 1, \sin \theta \leq 1$ より $C_x^2 \sin^2 \theta \leq 1$ となるため $D < 0$ である。よって式(2.7.91)の解は次式で表される。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{i4T_x C_x S_x \sin \theta \pm i4T_x \sqrt{S_x^2 + r_a^2 S_y^2 (1-C_x^2 \sin^2 \theta)}}{2(1-C_x^2 \sin^2 \theta)} \\ \Leftrightarrow Z &= \frac{i2T_x \{C_x S_x \sin \theta \pm \sqrt{S_x^2 + r_a^2 S_y^2 (1-C_x^2 \sin^2 \theta)}\}}{1-C_x^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (2.7.92)$$

式(2.7.92)に $Z = \zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}$, 式(2.7.59)を代入すると次式のようにになる。

$$\zeta^{-\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}} = i2T_x \Lambda \quad (2.7.93)$$

ここで、式(2.7.93)をもとに安定条件を求める。式(2.7.93)は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \zeta^{-1} - 2 + \zeta &= -4T_x^2 \Lambda^2 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\zeta + \zeta^2 &= -4T_x^2 \Lambda^2 \zeta \end{aligned} \quad (2.7.94)$$

ここで、 $A = 1 - 2T_x^2 \Lambda^2$ とおくと式(2.7.94)は次のように表される。

$$\zeta^2 - 2A\zeta + 1 = 0 \quad (2.7.95)$$

$T_x^2 > 0, \Lambda^2 > 0$ より $A \leq 1$ である。 ζ に関する二次方程式(2.7.95)の解は次の2通りで表される。

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4}}{2} \\ \Leftrightarrow \zeta &= A \pm \sqrt{A^2 - 1} \quad (A < -1) \end{aligned} \quad (2.7.96)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{2A \pm i\sqrt{-4A^2 + 4}}{2} \\ \Leftrightarrow \zeta &= A \pm i\sqrt{1 - A^2} \quad (-1 \leq A \leq 1) \end{aligned} \quad (2.7.97)$$

式(2.7.96), (2.7.97)にはそれぞれ解が2つずつあるが、これは平面波を入力後に波が2つの進行方向をもつからである。+側は y 軸正方向に進む波、-側は y 軸負方向に進む波を表している。さて、増幅率の絶対値が1を超えると式(2.7.96), (2.7.97)の解は発散する。これらが安定するために

はすべての ζ が $|\zeta| \leq 1$ となる必要がある。式(2.7.96)において、任意の A で $\zeta = A - \sqrt{A^2 - 1}$ は $|\zeta| \leq 1$ を満たさない (A は $\zeta = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$ の両方を満たす必要があるため、 $A < -1$ は不適である)。解が式(2.7.97)のときの ζ の絶対値、すなわち ζ の振幅は次式のように表される。

$$|\zeta| = \sqrt{(A)^2 + (\sqrt{1 - A^2})^2} = 1 \quad (2.7.98)$$

式(2.7.98)は $|\zeta| \leq 1$ を満たす。式(2.7.97)の条件は $-1 \leq A \leq 1$ で、 T_x に関する安定条件の式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 2T_x^2 \Lambda^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2T_x^2 \Lambda^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq T_x^2 \Lambda^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq T_x^2 \leq \frac{1}{\Lambda^2} \end{aligned} \quad (2.7.99)$$

$T_x > 0$ より、 $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ としたとき式(2.7.99)は次のように表される。

$$\begin{aligned} 0 &\leq T_x \leq \frac{1}{|\Lambda|_{\max}} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq c \frac{\Delta t}{\Delta h} \leq \frac{1}{|\Lambda|_{\max}} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \Delta t \leq \frac{\Delta h}{c} \frac{1}{|\Lambda|_{\max}} \end{aligned} \quad (2.7.100)$$

式(2.7.100)は式(2.7.60)と一致する。したがって空間離散化幅が $\Delta x = \Delta y = \Delta h = 5.0 \times 10^{-2}$ [m]のとき、各入射角の時間離散化幅 Δt はそれぞれ表 2.7.4 のように決定すると式(2.7.100)を満たす。表には 2.7.3, 2.7.4 節で設定した Δt もあわせて記す。

表 2.7.4 主な入射角の時間離散化幅

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s] (2.7.3 節)	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
Δt [s] (2.7.4, 2.7.5 節)	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}

2.7.6 振幅の増幅率を用いた数値的な分散解析

時間進行による波形の崩れは分散性による。時間ステップ n が 1 ステップ進んだとき、複素振幅の増幅率 ζ の理論的な振幅は 1、位相の変化量は $\omega\Delta t$ であるが、変換音場においてこれらの理論値と数値的な振幅、位相の変化量の比較で分散性を分析することができる。

式(2.7.98)より $|\zeta|=1$ なので、時間ステップ n が進んでも波の振幅は 1 で一定である。よって、振幅に関する誤差はないため、位相の変化量から分散性について議論する。 A^\pm は式(2.7.69)の Λ^+ 、式(2.7.70)の Λ^- をそれぞれ用いたとき次のように表される。

$$A^+ = 1 - 2T_x^2 (\Lambda^+)^2 \quad (2.7.101)$$

$$A^- = 1 - 2T_x^2 (\Lambda^-)^2 \quad (2.7.102)$$

このとき、式(2.7.97)より A^\pm に対応する ζ^\pm の偏角はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \angle\zeta^+ &= \tan^{-1} \frac{\pm\sqrt{1-(A^+)^2}}{A^+} \\ \Leftrightarrow \angle\zeta^+ &= \pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-(A^+)^2}}{A^+} \end{aligned} \quad (2.7.103)$$

$$\begin{aligned} \angle\zeta^- &= \tan^{-1} \frac{\pm\sqrt{1-(A^-)^2}}{A^-} \\ \Leftrightarrow \angle\zeta^- &= \pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-(A^-)^2}}{A^-} \end{aligned} \quad (2.7.104)$$

さらに位相誤差 ε^\pm を次式のように数値的に求める。

$$\begin{aligned} \varepsilon^+ &= \frac{\angle\zeta^+ \mp \omega\Delta t}{\pm\omega\Delta t} \\ \Leftrightarrow \varepsilon^+ &= \frac{\pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-(A^+)^2}}{A^+} \mp \omega\Delta t}{\pm\omega\Delta t} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (2.7.105)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^- &= \frac{\angle\zeta^- \mp \omega\Delta t}{\pm\omega\Delta t} \\ \Leftrightarrow \varepsilon^- &= \frac{\pm \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-(A^-)^2}}{A^-} \mp \omega\Delta t}{\pm\omega\Delta t} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (2.7.106)$$

これらの誤差 ε^\pm は入射角 θ 、時間離散化幅 Δt 、空間離散化幅 Δh 、波数 k'' 、伝搬角 α の関数である。さらに k'' と Δh の関係は次式で表される。

$$k''\Delta h = \frac{2\pi f}{c} \Delta h = 2\pi \frac{\Delta h}{\lambda} \quad (2.7.107)$$

ただし、 f と λ はそれぞれ周波数とその波長である。

図 2.7.10, 2.7.11 は式(2.7.105), (2.7.106)の上側の符号を採用したときの $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad]のときの位相誤差 [%]を伝搬角が $\alpha=3\pi/2$ から $\pi/2$ まで $\pi/4$ [rad]刻みで示している。 $\alpha=\pi/2$ から $3\pi/2$ までのときも同様の結果が得られる。横軸は空間離散化幅と波長の比 $\Delta h/\lambda$ で、値が大きいほど空間を粗く離散化していることを表す。 Δh を一定とすると横軸は周波数に相当する。空間離散化幅が $\Delta x=\Delta y=\Delta h=5.0\times 10^{-2}$ [m]のときを想定し、 Δt は表 2.7.5のように設定した。このときの Courant 数は表 2.7.5 のとおりである。

表 2.7.5 主な入射角の時間離散化幅と Courant 数

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s]	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}
T_x [-]	0.680	0.680	0.680	0.476

$\theta=0$ のとき、式(2.7.63), (2.7.64), (2.7.69), (2.7.70), (2.7.101), (2.7.102)より A^+ , A^- はそれぞれ次式のようになる。

$$A^+ = 1 - 2T_x^2 \left(\sqrt{S_x^2 + S_y^2} \right)^2 \quad (2.7.108)$$

$$\leftrightarrow A^+ = 1 - 2 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{k''\Delta h \sin \alpha}{2} + \sin^2 \frac{k''\Delta h \cos \alpha}{2} \right)$$

$$A^- = 1 - 2T_x^2 \left(-\sqrt{S_x^2 + S_y^2} \right)^2 \quad (2.7.109)$$

$$\leftrightarrow A^- = 1 - 2 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{k''\Delta h \sin \alpha}{2} + \sin^2 \frac{k''\Delta h \cos \alpha}{2} \right)$$

式(2.7.108), (2.7.109)はいずれも式(2.4.16)の A_0 と一致する。よって図 2.7.10 (a), 2.7.11 (a)は図 2.4.1 (b)と同じ結果を示している。変換音場においても $\theta=0$ のときは通常音場と同様に $\Delta h/\lambda$ が大きくなると分散誤差は増大し、周波数が高くなると誤差が大きくなることがわかる。また、伝搬角が x, y 軸方向から遠くなる $\alpha=-\pi/4, \pi/4$ のときの誤差の絶対値が小さく、軸と一致する $\alpha=3\pi/2, 0, \pi/2$ のときに誤差が大きくなる。

$0 < \theta < \pi/2$ のときの位相誤差についても議論するが、はじめに図 2.7.10, 2.7.11 のグラフが途切れている箇所について考察する。これは式(2.7.101), (2.7.102)の A^+ , A^- が -1 よりも小さくなって

いることに起因しているが、図 2.7.8 (c) $\theta=\pi/4$ のときの $\alpha=\pi/4$, $\Delta h/\lambda=0.3$ を例にあげて数値的な検討を行う。これらの条件において、式(2.7.69)の Λ^+ は $\Lambda^+=1.660$ となり、式(2.7.74)で求められる $\alpha=\pi/2$ のときの $|\Lambda|_{\max}=1.414$ を超える。ここで、この Λ^+ を用いた場合の安定条件を $\Delta t'$ を用いて次式のように表し、さらに Courant 数も定義する。

$$\Delta t' \leq \frac{\Delta h}{c} \frac{1}{\Lambda^+} \quad (2.7.110)$$

$$T_x' = c \frac{\Delta t'}{\Delta x} \quad (2.7.111)$$

式(2.7.110)より $\Delta t'=8.857 \times 10^{-5}$, $T_x'=0.602$ が得られ、表 2.7.5 の $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}$, $T_x=0.680$ よりも小さくなることから、 $\Delta h/\lambda=1/20=0.05$ のときの安定条件の式と比較して厳しくなる。また、 $\Delta h/\lambda=0.05$ のときに $|\Lambda|_{\max}$ をとる α は $\alpha=\pi/2$ であるが、 $\Delta h/\lambda=0.3$ のときに $|\Lambda|_{\max}$ をとる α は $\alpha=\pi/2$ とは異なる。したがって Courant 数を固定して位相誤差を求めると式(2.7.101)の A^+ が $A^+ < -1$ となり、式(2.7.103)の $\angle \zeta^+$ の解がなくなることで式(2.7.105)の ε^+ が求められなくなる。つまり、空間を波長に対して細かく離散化しないと安定した結果が得られないということになる。この傾向は入射角が大きくなるほど顕著になる。

さて、図 2.7.10 の $0 < \theta < \pi/2$ のときは、 $\Delta h/\lambda$ により表される周波数と誤差の相関性は一概にはみられず伝搬角によって異なる。さらに $\theta=0$ のときに得た伝搬角と軸方向が離れるほど誤差が小さくなるという関係も成り立たない。空間離散化幅が波長より十分に小さい $1/10$ 以下の場合については、 $\alpha \geq 0$ のときは α が $\pi/2$ に近づくほど誤差が大きくなる。 $\alpha \leq -\pi/4$ のときは誤差が負の値をとり α が $-\pi/2$ の方が絶対値が大きくなる。図 2.7.11 の ε^- は図 2.7.10 の ε^+ の伝搬角を $\alpha=0$ に関して対称にした結果となった。なお、式(2.7.105), (2.7.106)の下側の符号を採用したときの位相誤差も上側の符号のときの結果と同様になる。

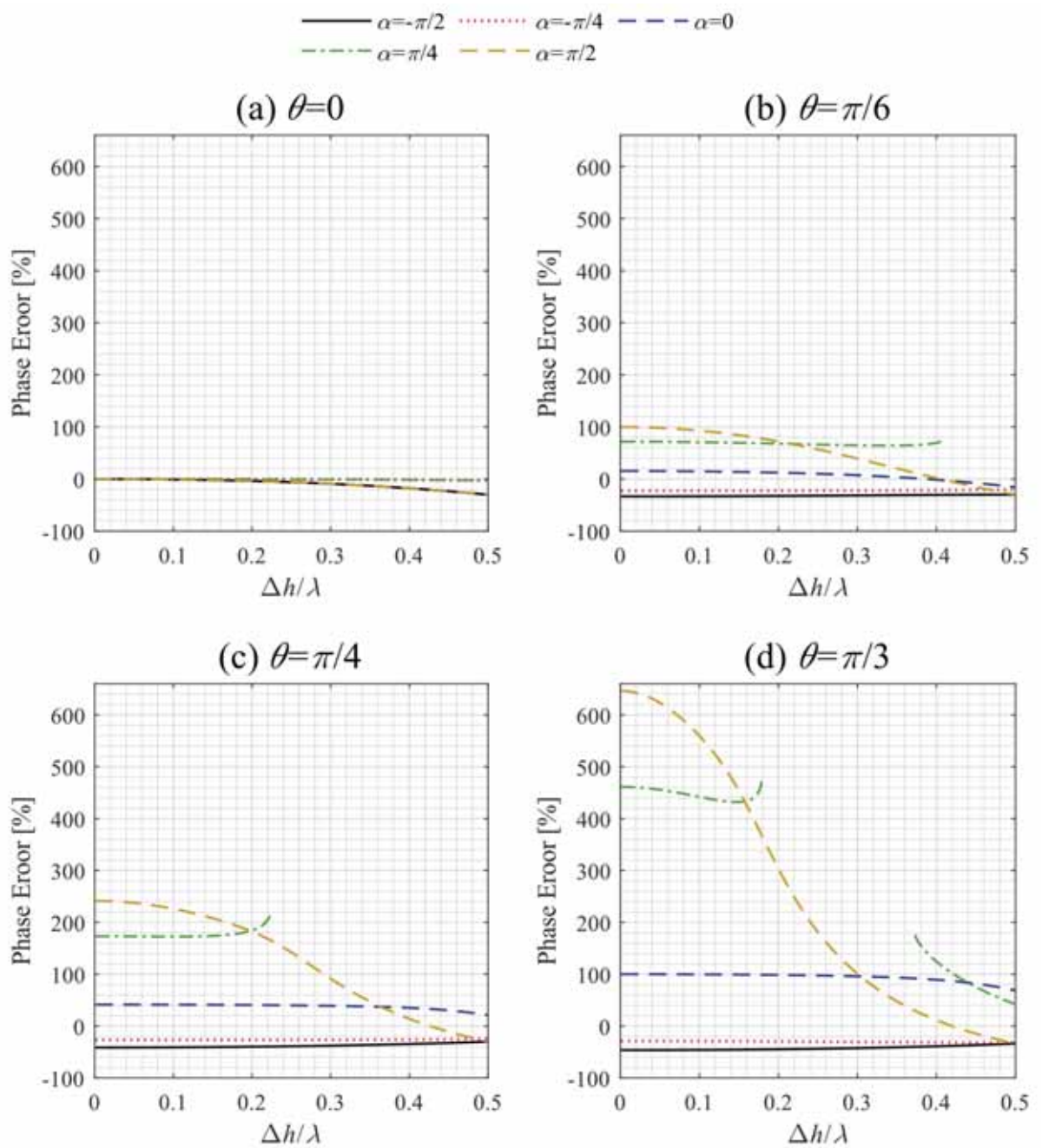


図 2.7.10 変換音場の入射角ごとの位相誤差 ε^+

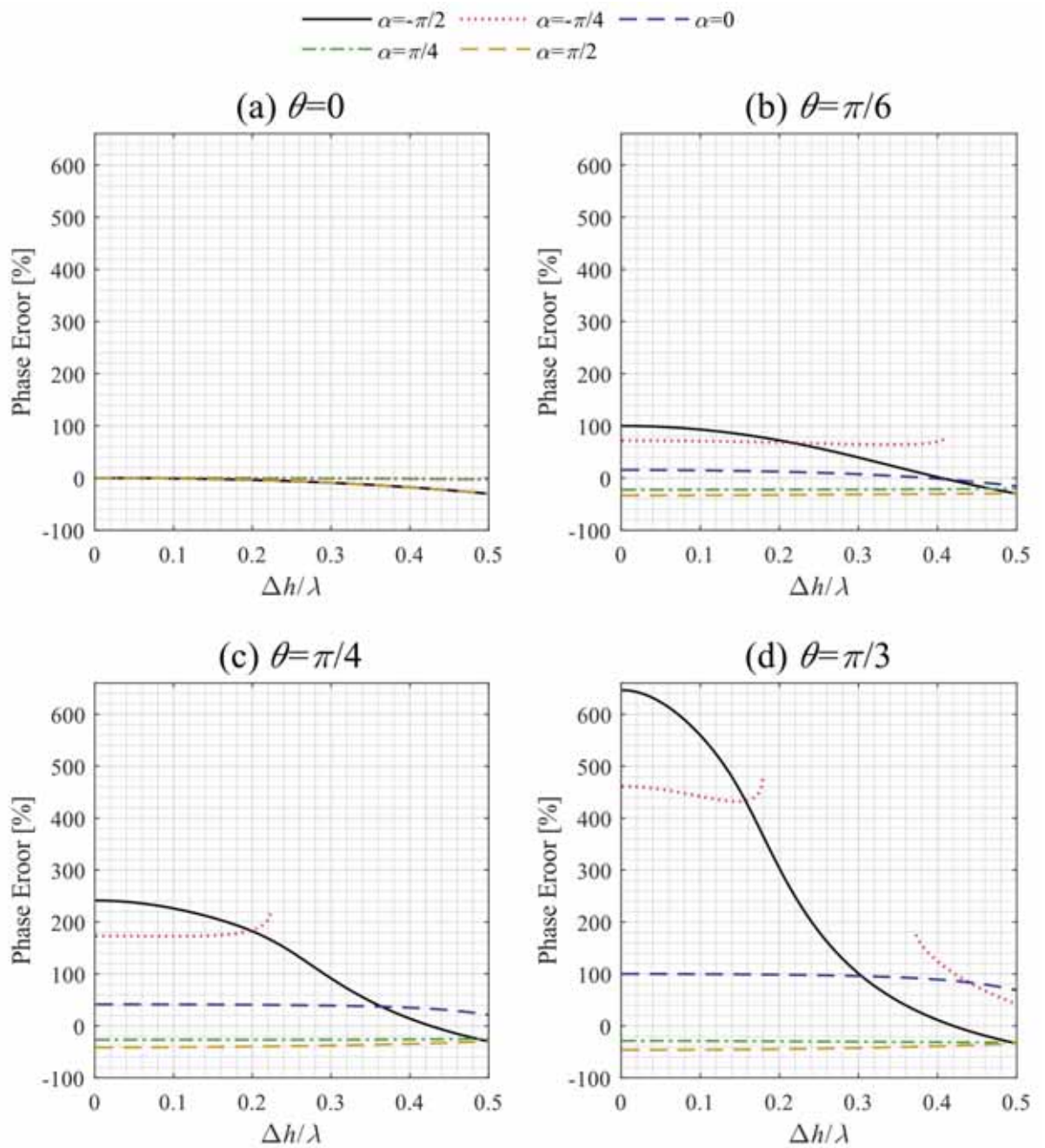


図 2.7.11 変換音場の入射角ごとの位相誤差 ε^-

図 2.7.12, 2.7.13 に変換音場において $\theta=\pi/6, \pi/4, \pi/3$ で Courant 数を小さくしたときの位相誤差を示す。ここでは、2.7.3 節で求めた理論的な安定条件を満たす時間離散化幅 Δt を用いた。このときの Δt と T_x は表 2.7.6 の通りである。 T_x を小さくすることによりすべての $\Delta h/\lambda$ で位相誤差の解を求められるようになった。 Δt が λ より十分に小さい $1/10$ 以下の場合、Courant 数が小さい方が図 2.7.10, 2.7.11 と比較して誤差の絶対値が小さくなる。すなわち、通常音場では安定条件の式を満たす限界に近い Δt を採用する方が誤差は小さくなったが、変換音場では数値的な安定条件の式(2.7.100)を満たすぎりぎりの Δt よりも細かい時間離散化幅を設定する方がよいということがわかる。

表 2.7.6 主な入射角の時間離散化幅と Courant 数

θ [rad]	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s]	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}
T_x [-]	0.340	0.204	0.068

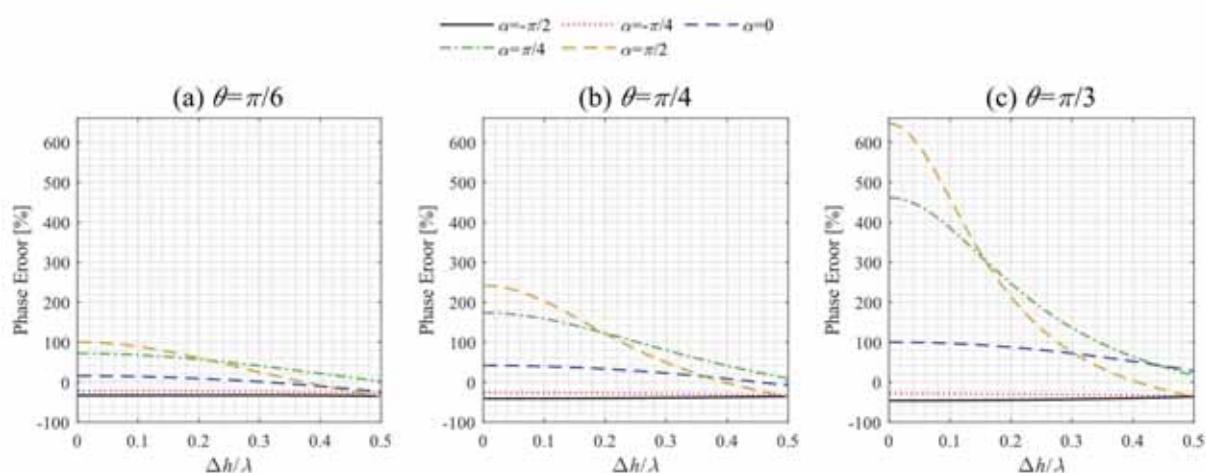


図 2.7.12 変換音場の Courant 数を小さくしたときの入射角ごとの位相誤差 ε^+

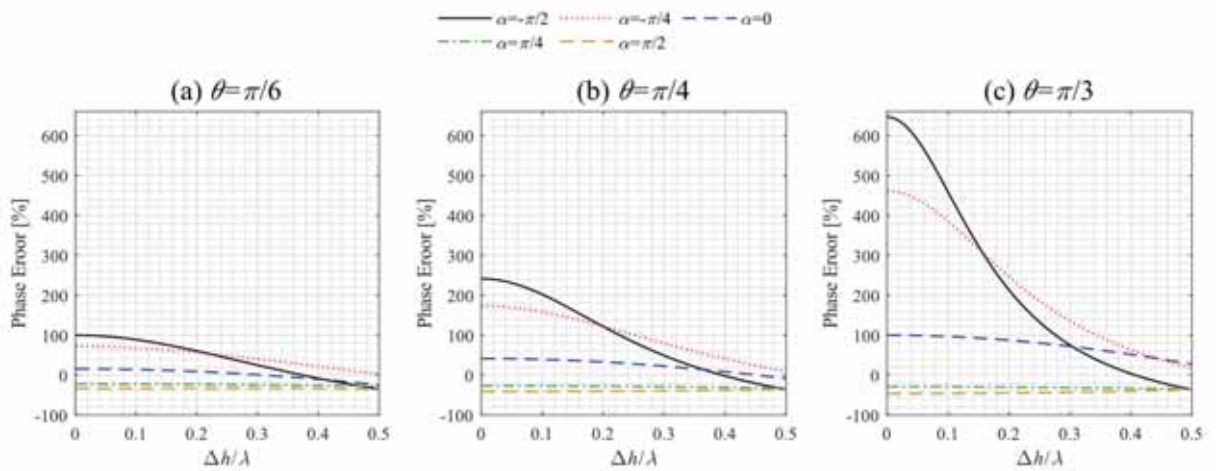


図 2.7.13 変換音場の Courant 数を小さくしたときの入射角ごとの位相誤差 ε^-

図 2.7.14 に音速 c と $\Delta h/\lambda=0.05$ とした場合の位相速度 c'' の割合を示す。図 2.7.14(a), (b) は表 2.7.5 の、図 2.7.14(c), (d) は表 2.7.6 の Δt と T_x を代入した際の c''/c で、角度の軸は伝搬角 α である。 c''/c は式(2.7.105), (2.7.106)の ε^+ , ε^- を用いてそれぞれ次式で表される。

$$\frac{c''^+}{c} = 1 + \varepsilon^+ \quad (2.7.112)$$

$$\frac{c''^-}{c} = -(1 - \varepsilon^-) \quad (2.7.113)$$

$\theta=0$ のときは 2.4.2 節の考察と同様に伝搬角に依存したわずかな誤差があり完全な円形ではない。これらの円は c''^+/c と c''^-/c で一致する。 $0 < \theta < \pi/2$ のときは中心が 0 から離れて偏った円となり、 c''^+/c と c''^-/c は y 軸に関して対称である。また、Courant 数が小さい方がこれらの割合は小さくなる。このように変換音場では 2 個の解が常にあり、それぞれが干渉しあっていると考えられる。

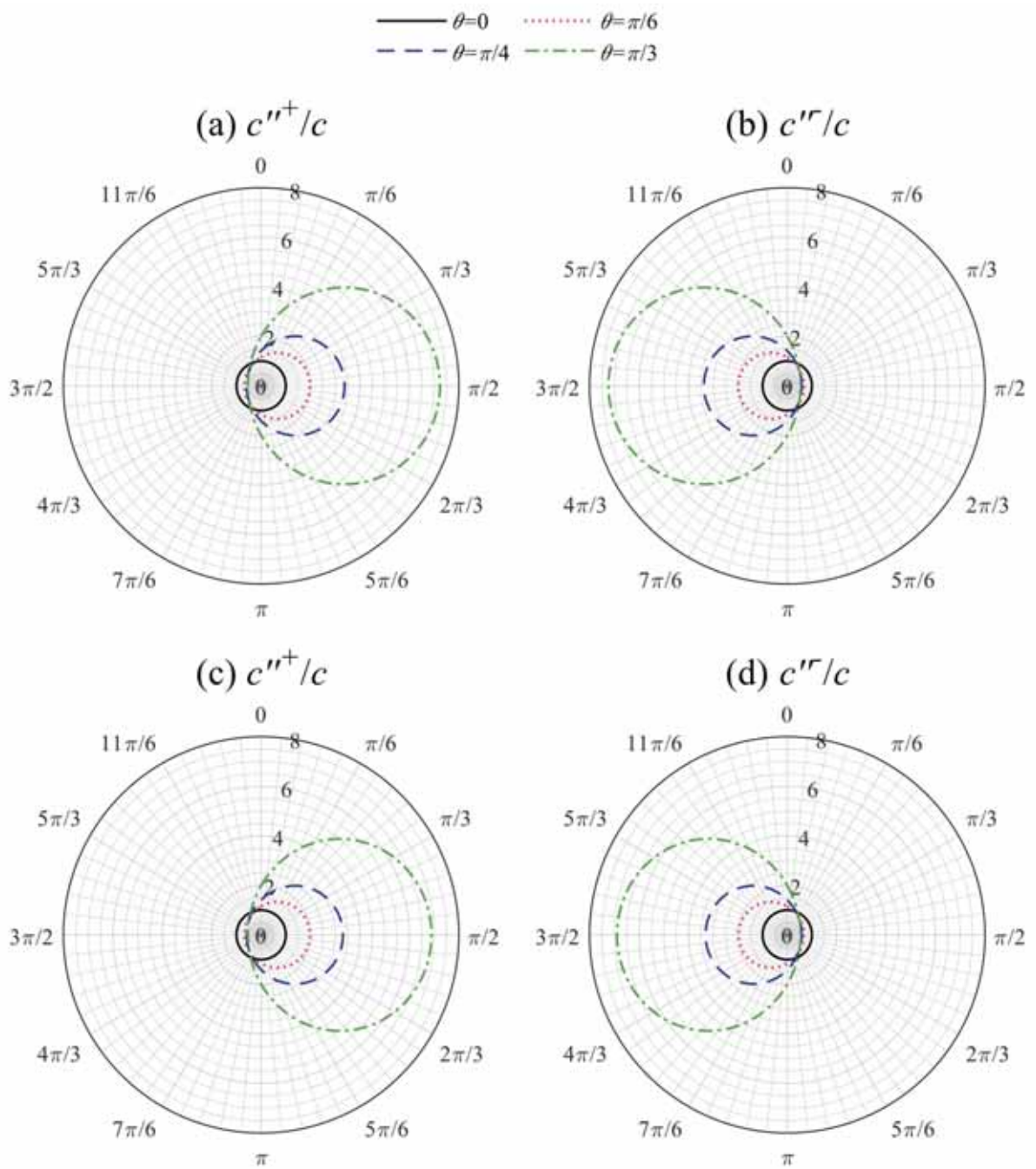


図 2.7.14 変換音場での c と c'' の割合

2.7.7 変換音場への点音源の配置

2.7.6 節では変換音場に平面波を入力したときの数値的な分散性について検討したが、本節では点音源を入力したときの音圧分布の図から分散性を調査する。図 2.7.1 から予測される変換音場での位相速度が音波の動きに与える影響を考察する。

散乱体のない変換音場に点音源を入力した際の音圧の空間分布を図 2.7.15 に示す。ただし、上下左右ともに境界条件を剛とした $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ の領域を解析対象とし、音圧分布を示した領域は周囲からの反射がない時刻かつ位置である中央の $5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ の範囲としている。入力した音源は平面波ではなく点音源であるが、音場は変換によりそれぞれ $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad]だけ半時計周りに回転している。ここでの時間離散化幅は 2.7.6 節で数値的な安定条件の式から得られる離散化幅よりも細かい離散化幅を採用すると誤差が小さくなることが明らかになったため、表 2.7.7 のように設定する。図 2.6.5~2.6.7 の音圧分布は式(2.6.12)を用いた逆変換後のものであるが、図 2.7.15 の分布は逆変換を行う前のものである。

$\theta=0$ のときは 2 つの解が一致するため、これらの解が重なり 1 つの円が描かれている。 $0 < \theta < \pi/2$ のときは 2.7.4~2.7.6 節で議論したように異なる解を 2 つずつもち、伝搬角によって位相速度が異なるため円形が崩れて楕円形のような形が左右対称に広がっている。また、それぞれの図で中央部の色が濃く、外側にむかうにつれて色が薄くなっている。

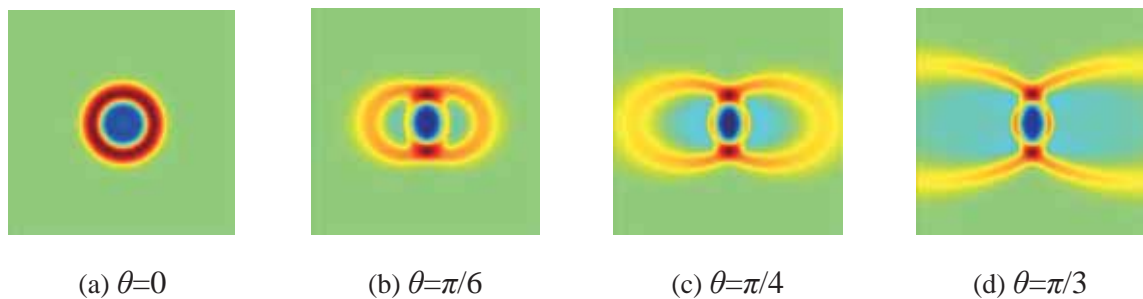


図 2.7.15 変換音場での逆変換前の点音源の挙動

表 2.7.7 時間離散化幅

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Δt [s]	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}

波面の円形が崩れることに対して、考察の1つとして変換音場における定性的な点音源の波面と進行方向について検討する。以下の手順で変換音場に点音源を入力した後の波面と進行方向を作図する。

xy 座標の中心に点音源を配置し、図 2.7.16 (a)のように式(2.7.29)で求められる位相速度 c^+ で進む波の Δt 秒後の波面を描く。このとき、波面は x 軸正方向に偏心した円となる。ここで、変換音場にホイヘンスの原理が成り立つと仮定する。図 2.7.16 (a)の波面上の各点が新しく波源となった素元波が生じ、これを図 2.7.16 (b)に描く。素元波は円形であるが、変換音場の位相速度 c^+ で広がるため Δt 秒後の波面と同様に偏心していることに注意しなければならない。図 2.7.16 (c)に素元波に共通に接する面を描き、これが次の波面となる。図 2.7.16 (c)の波面も円形であり、さらに以降も図 2.7.16 (d)のように円形を保ったままへ面は大きくなる。これは、図 2.7.16 (e)に示されているように素元波が伝搬角に沿って等距離に進むからである。

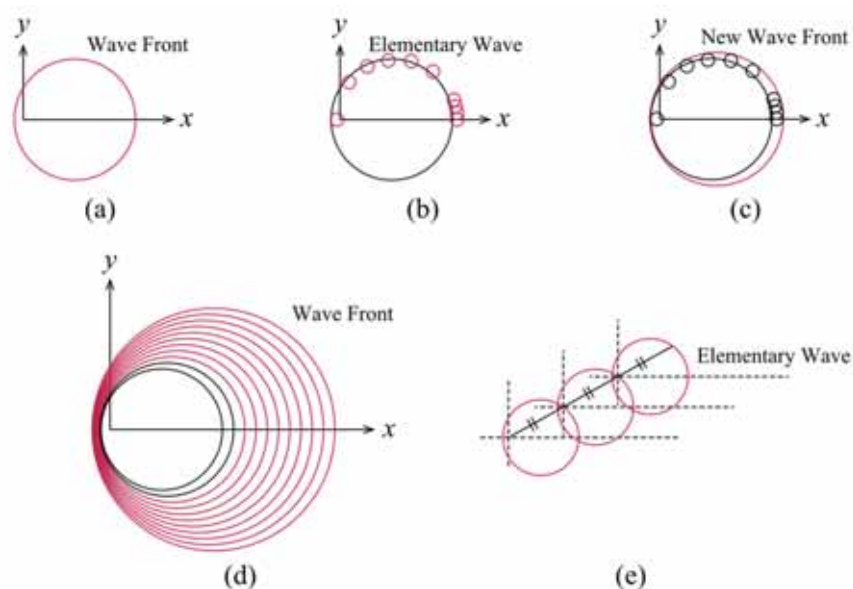


図 2.7.16 変換音場で予測される波面

波の進行方向は波面と常に直交する。したがって、進行方向は波面から導かれる。はじめに、図 2.7.17 のように原点から最も近い波面の円まで進行方向の線分を引く。次に波面との接点から波面に対して接線を描き、進行方向の線分を接線に垂直に引く。このような進行方向の線分と波面が交わるたびに進行方向が変わる手順を繰り返す。

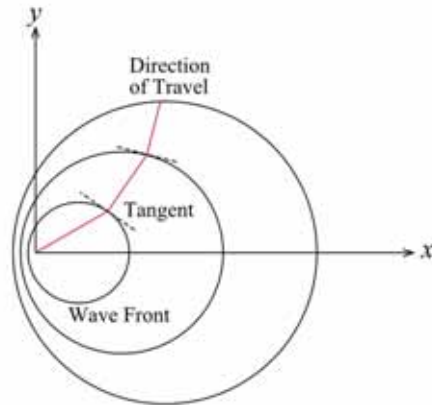


図 2.7.17 変換音場で予測される進行方向

図 2.7.16, 図 2.7.17 の波面と進行方向の作図方法を用い, 図 2.7.18 に Δt ごとの変換音場における位相速度 c^+ で広がる波面をグレーで, ここから予測される波の進行方向を赤で示す。 Δt は表 2.7.7 を使用した。また, 1.0×10^{-4} s ごとの c^+ で広がる波面を黒で重ねて描いている。図の範囲は $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ である。 $\theta=0$ のときは, 波面はどの伝搬方向にも均等に広がり, 進行方向は図の中心を始点として真っ直ぐに伸びる。 $0 < \theta < \pi/2$ のときは図 2.7.1 で考察したとおり, 波面は中心が 0 から離れて偏った円となる。時間が経つごとに $\alpha=3\pi/2$ 方向の波面は線の本数が多い, すなわち密度が増し, 反対に $\alpha=\pi/2$ 方向の波面は密度が小さくなる。進行方向は図の中央の点から $\pi/18$ ごとに 36 本の線分を放射状に描き, 線分がグレーで示した円と交わった点から円の接線に対して直交する角度で線分をひき, さらに次に円と交わった点で線分の角度を変えることを繰り返す方法で辿られている。入射角が大きくなると進行方向が波面の線が密集する $\alpha=3\pi/2$ にむかって大きく逸れていくことが図から読み取れる。図 2.7.18 の範囲を図 2.7.15 と同じ $5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ まで広げると波がさらに $\alpha=-\pi/2$ にむけて曲がって進むことが予想される。さらに, 図 2.7.19 に位相速度 c^- で広がる波面と波の進行方向を示す。これは図 2.7.18 を y 軸に平行な直線に関して対称にした図と一致する。図 2.7.15 の中央に近い部分の色が濃いのは図 2.7.18 で示されている c^+ の $\alpha=3\pi/2$ 方向の波面, 図 2.7.19 で示されている c^- の $\alpha=\pi/2$ 方向の波面の密度が高いことに関連している。また, 図 2.7.15 の外側の色が薄くなっているのは図 2.7.18 で示されている c^+ の $\alpha=\pi/2$ 方向の波面, 図 2.7.19 で示されている c^- の $\alpha=3\pi/2$ 方向の波面の密度が低いことに関連している。

しかしながら, 図 2.7.18, 図 2.7.19 は図 2.7.15 の分布の楕円形のような形状とは異なることから, 変換音場では図 2.7.16 で示すホイヘンスの原理が成り立たないと考えられる。

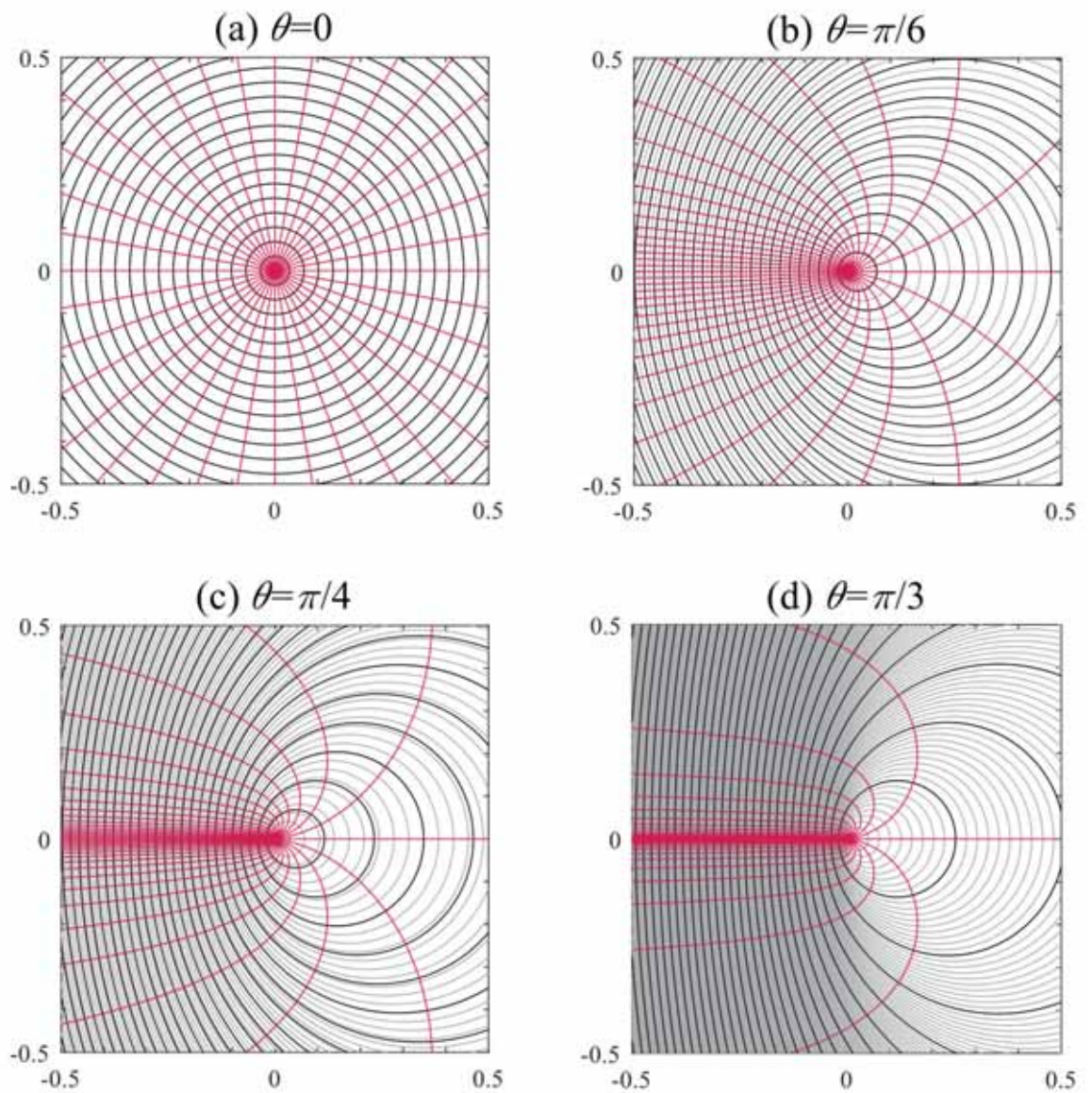


図 2.7.18 変換音場で位相速度が c^+ のときの波面と、波面から予測される進行方向

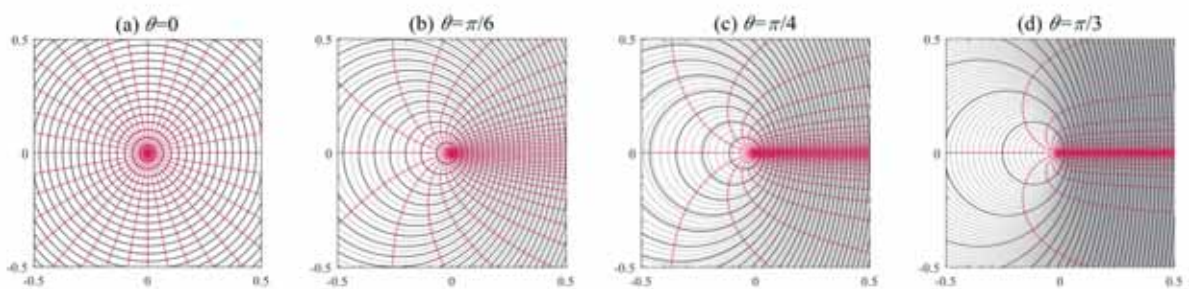


図 2.7.19 変換音場で位相速度が c^- のときの波面と、波面から予測される進行方向

さて、図 2.7.16 で示したようなホイヘンスの原理が成り立たない変換音場において時間の経過とともに波面と波の進行方向がどのように変化するかを考察する。図 2.7.16, 2.7.17 は波面から進行方向を導いたが、ここからは進行方向から波面を導く以下の手順で作図する。

xy 座標の中心に点音源を配置し、図 2.7.20 (a)のように式(2.7.29)で求められる位相速度 c^+ で進む波の 0 秒から Δt 秒までの進行方向を描く。図 2.7.20 (b)のように進行方向の線分の先端を結ぶことで波面を描く。さて、 Δt 秒ごとに進行方向は変化する。ここからは一部の角度のみの図で波面と波の進行方向の描き方を議論することとする。波の進行方向は波面に対して垂直であることから、図 2.7.20 (b)の波面に直交する線分を次に描く進行方向の線分としてひく必要がある。図 2.7.20 (c)に赤の破線で示す対象とする進行方向の線分の両隣の中心差分をとる。これを波面の傾きとして近似し、この傾きに平行な直線を図 2.7.20 (c)の赤い直線のように進行方向の線分の先端に接するように描く。図 2.7.20 (c)の赤い直線に垂直な線分を図 2.7.20 (c)のように進行方向の線分の先端から描く。線分の長さは式(2.7.29)で求められる位相速度 c^+ に Δt をかけたものとする。さらに、図 2.7.20 (e)のように進行方向の線分の先端を結び、波面を描く。この手順の繰り返して進行方向の線分と波面を交互に描く。

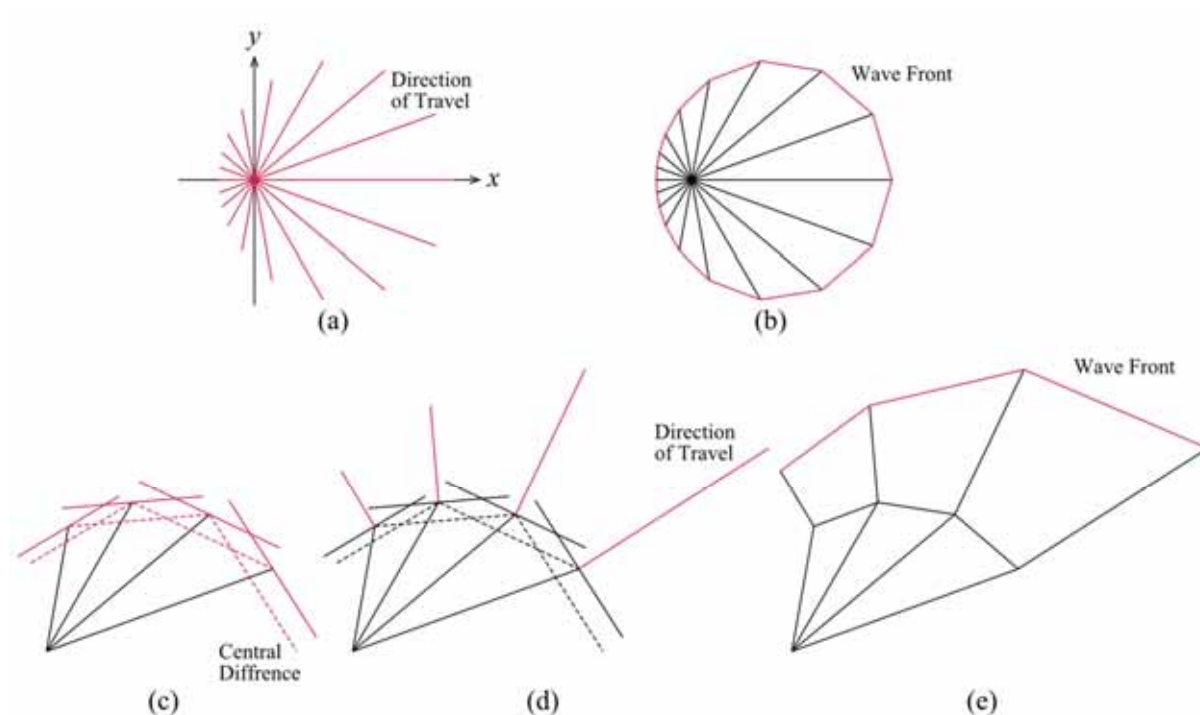


図 2.7.20 変換音場で予測される進行方向と波面

図 2.7.20 の波の進行方向と波面の作図方法を用い、図 2.7.21 に位相速度 c^+ を用いた際の Δt ごとの変換音場における $\pi/18$ ごとに 36 本の進行方向を赤で、波面をグレーで示す。 Δt は表 2.7.7 を使用した。また、 1.0×10^{-4} s ごとの波面を黒で重ねて描いている。図の範囲は $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ である。 $\theta=0$ のときは、図 2.7.18 と同様に波面はどの伝搬方向にも均等に広がり、進行方向は図の中心を始点として真っ直ぐに伸びる。さて $0 < \theta < \pi/2$ の場合、波面は中心が 0 から離れ、かつ楕円のような形となる。これは図 2.7.15 の分布とよく一致しているといえる。伝搬角と波面の密度の関係の傾向は図 2.7.18 と同様に、時間が経つごとに $\alpha=3\pi/2$ 方向の波面は密度が増し、反対に $\alpha=\pi/2$ 方向の波面は密度が小さくなる。図 2.7.15 の色の濃淡と図 2.7.21 の波面の密度は関連しているといえる。さらに、図 2.7.22 に位相速度 c^- を用いた際の波の進行方向と波面を示す。これは図 2.7.21 を y 軸に平行な直線に関して対称にした図と一致する。これらの波面の干渉により変換音場の波は通常音場と異なるふるまいをされると考えられる。

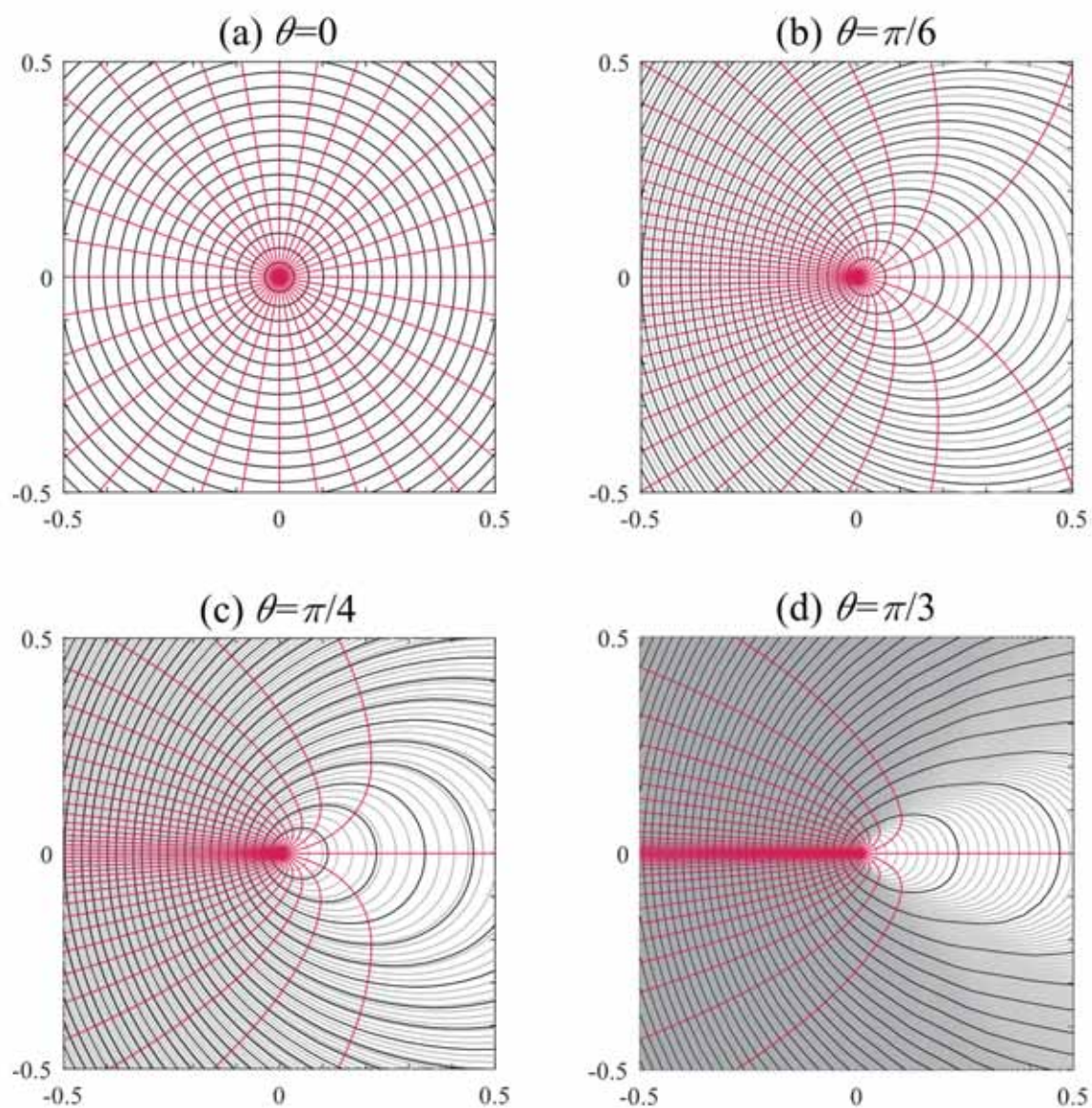


図 2.7.21 変換音場で位相速度が c^+ ときの波の進行方向と波面

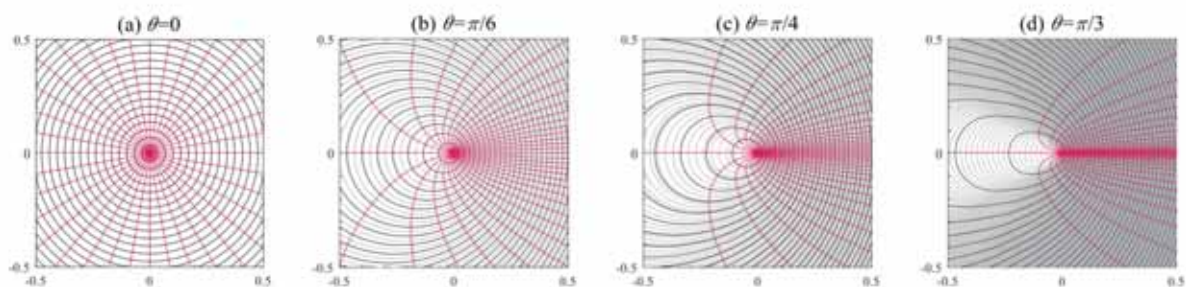


図 2.7.22 変換音場で位相速度が c^- ときの波の進行方向と波面

2.8 変換音場の計算効率と精度向上

単位構造のみを計算することにより、変換音場の解析は通常音場よりも効率がよいと考えられる。本章では通常音場と変換音場の計算効率について検証する。さらに、これまでの変換音場における解析結果からの精度の向上について検討する。

2.8.1 計算効率

表 2.8.1 に $\theta=\pi/4$ で透過損失を求めるときに必要な通常音場と変換音場の計算コストの比較を示す。通常音場の支配式は 2.2.1 節の式(2.2.4)~(2.2.8)，変換音場の支配式は 2.5.2 節の式(2.5.19)，(2.5.21)，(2.5.23)，(2.5.26)~(2.5.29)である。通常音場の変数の数は 5 個，変換音場の変数の数は 7 個となり，変換音場の方が多。解析に必要なセル数は解析領域の寸法を空間離散化幅で除し，吸収境界の層数を加えたものから求める。通常音場の解析領域の寸法は 2.3.1，2.3.2 節より $x_{\max}=y_{\max}=2000$ [m]，変換音場の解析領域の寸法は 2.6.1 節より $x_{\max0}=y_{\max0}=5.0$ [m]である。空間離散化幅は通常音場，変換音場ともに $\Delta x=\Delta y=5.0\times 10^{-2}$ [m]である。また，吸収境界の層数は通常音場では x ， y 方向にそれぞれ 64 [層]ずつ，変換音場では y 方向にのみ 64 [層]である。よって，セル数は通常音場で 1.61×10^9 個，変換音場で 1.64×10^4 個となる。表 2.8.1 に示すように必要なメモリ量は通常音場で 69.0 [GB]，変換音場で 4.94 [MB]となり，変換音場では大幅に抑えることができた。

さて，通常音場で安定した正確な解が得られる解析対象の上限時間は 2.3.2 節で求めた $t_{\max}=2.82$ [s]である。また，変換音場では 2.6.2 節のように $t_{\max}=1.0$ [s]とした。時間離散化幅は通常音場は 2.4.1 節の式(2.4.12)で決定される $\Delta t=1.0\times 10^{-4}$ [s]，変換音場は 2.7.3 節の式(2.7.31)で決定される $\Delta t=3.0\times 10^{-5}$ [s]である。解析対象の上限時間を時間離散化幅で除して時間ステップ数を算出する。通常音場では 2.82×10^4 ，変換音場では 3.33×10^4 となった。解析にかかった時間は通常音場では 1.15×10^7 [s]，変換音場では 5.52×10^2 [s]となった。変換音場の解析時間は通常音場と比較して約 1/20000 に短縮された。なお，計算に用いたプログラムは共有メモリ型の並列処理を行った。計算効率の向上により，通常音場よりも解析の上限周波数を高域まで設定することが可能になる。

表 2.8.1 通常音場と変換音場の計算コスト

	Number of variables	$x_{\max}=y_{\max}$ [m]	Total number of cells	Required memory
Usual Field	5	2000	1.61×10^9	69.0 [GB]
Mapped Field	7	5.0	1.64×10^4	4.94 [MB]
	t_{\max} [s]	Δt [s]	Number of timesteps	Simulation time [s]
Usual Field	2.82	1.0×10^{-4}	2.82×10^4	1.15×10^7
Mapped Field	1.00	3.0×10^{-5}	3.33×10^4	5.52×10^2

2.8.2 高周波数帯域の計算例

2.8.1 節では変換音場は通常音場よりも効率よく計算できることが示された。さて、2.6.2 節で算出した透過損失は 2.3.4 節の透過損失を真値として比較するために解析対象上限周波数を $f_{\max}=340$ [Hz] としたが、本節では変換音場においてより高域の解析が可能であるか検討する。解析対象上限周波数は $f_{\max}=340$ に加えて、 $f_{\max}=500$ から 4k まで倍ごとに増加させた。解析時間は $t_{\max}=1.0$ [s] であるため、周波数分解能は $\Delta f=1.0$ [Hz] となる。波長の短い高周波数帯域の解析に対応するためには空間離散化幅を細かくする必要がある、それに伴い時間離散化幅も細かくしなければならない。このときの離散化幅の各条件はそれぞれ表 2.8.2 のように設定した。 Δt は 2.7.3 節の式(2.7.31)から決定した。さらに、ガウシアンパルスも高域に合わせた値を与える。すなわち、表 2.8.3 のようにガウシアンパルスの急峻さを表す係数 C を大きく、中心時刻の t_0 を小さく設定する。また、本節の単位構造は $x_{\max 0}=5$ [m], $y_{\max 0}=7$ [m] とし、その上下端に 2.2.4 節で検討した性能の PML を配置し透過損失を求めるための音圧、粒子速度の参照点は単位構造の上端の 100 ヶ所の点とした。 $y_{\max 0}$ を大きくとることで散乱体の剛な境界から十分な距離をとることでより正確な結果を期待する。 $f_{\max} \geq 500$ のときは離散化幅が $f_{\max}=340$ のときよりも細かくなり参照可能な点の数が 100 を超えるが、 $f_{\max}=340$ の場合の参照点に x 座標に近い点を 100 ヶ所選んだ。

表 2.8.2 離散化幅

f_{\max} [Hz]	340	500	1k	2k	4k	
$\Delta x=\Delta y$ [m]	5.0×10^{-2}	3.4×10^{-2}	1.7×10^{-2}	8.5×10^{-3}	4.25×10^{-3}	
Δt [s]	$\theta=0$	1.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	8.0×10^{-6}
	$\theta=\pi/6$	5.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	8.0×10^{-6}	4.0×10^{-6}
	$\theta=\pi/4$	3.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.0×10^{-6}	2.0×10^{-6}
	$\theta=\pi/3$	1.0×10^{-5}	9.0×10^{-6}	5.0×10^{-6}	2.0×10^{-6}	1.0×10^{-6}

表 2.8.3 ガウシアンパルスの各値

f_{\max} [Hz]	340	500	1k	2k	4k
m [m^3/s]	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C [-]	2.0×10^6	2.0×10^6	8.0×10^6	4.0×10^7	1.5×10^8
t_0 [s]	3.0×10^{-3}	3.0×10^{-3}	1.3×10^{-3}	6.0×10^{-4}	3.0×10^{-4}

図 2.8.1～2.8.3 に単位構造の中央に一辺の長さが $a=0.5, 2.5, 4.5$ [m] 四方の散乱体が配置されているときの入射角 $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad] のときの透過損失を示す。 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ を細かくしても低域、500～1k Hz 前後の中域での透過損失はよく一致している。 $f_{\max}=500$ としたときの透過損失には他の f_{\max} を設定したときと比べてずれが生じているが、これは $x_{\max 0}, y_{\max 0}$ が空間離散化幅の整数倍になっていないことと空間離散化幅が粗いことから近似されたモデルが $f_{\max}=340$ のときのもの寸法が異なっているからであると考えられる。また、2 kHz よりも高域で特に入射角が大きい場合に透過損失が 2 dB ほど前後している箇所があるが、この原因については今後の検討課題である。さらに、図 2.8.3 (a) において $f_{\max}=2k, 4k$ のときの低域の透過損失が大きくなっている。離散化幅を細かくした際に透過損失が正確に求められない原因を明確にしなければならないが、これは $y_{\max 0}$ をさらに大きくとることで改善される。また PML の端の剛な境界からの反射波の影響が考えられるため、PML の性能を向上できれば、より良い結果が得られる可能性もある。有限要素法や境界要素法を用いた透過損失の結果との比較をすることにより本稿で提案した手法の精度を調査する必要があるが、本手法は従来の FDTD 法よりも効率的に斜入射音場を解析できるといえるだろう。

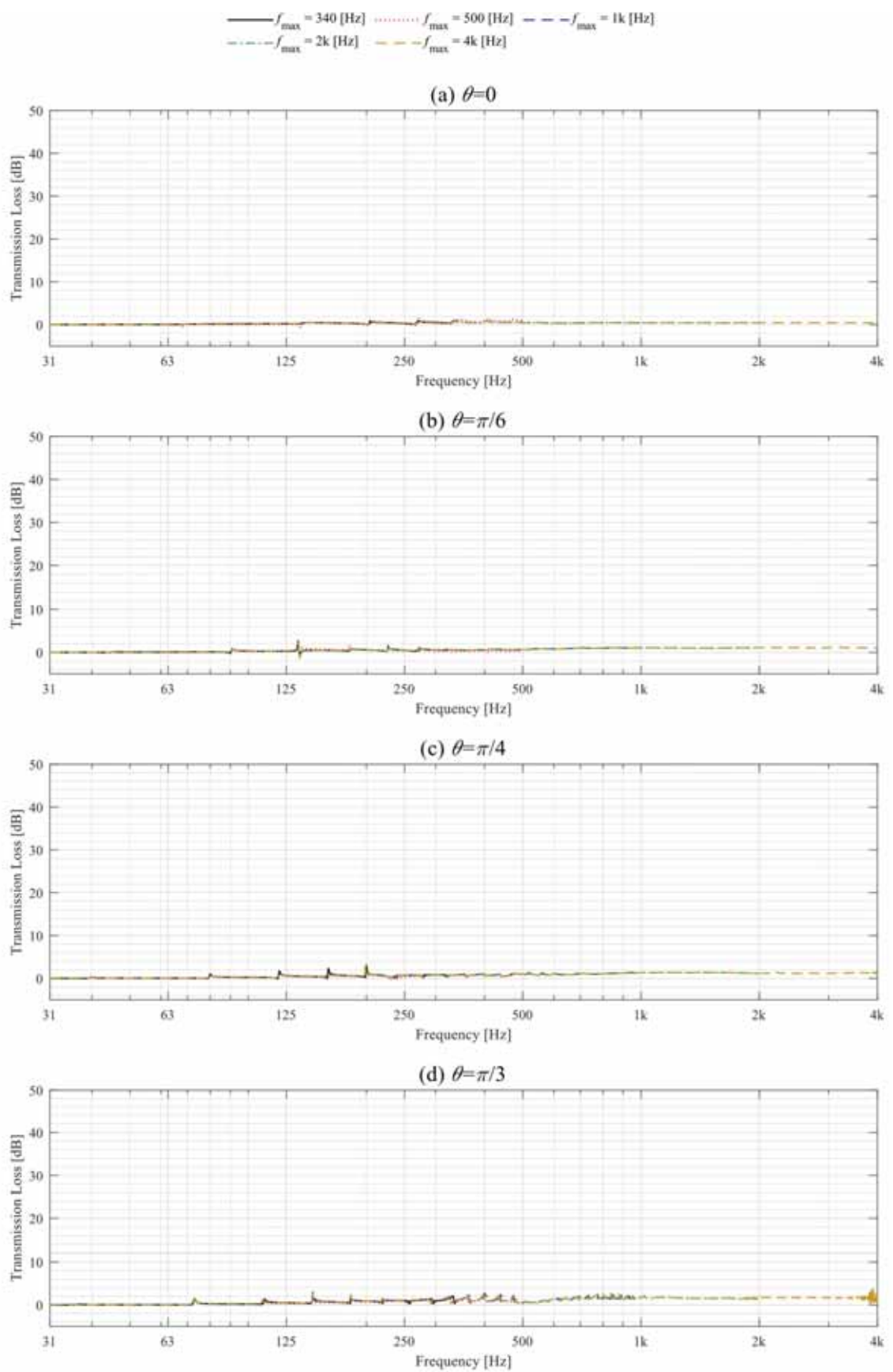


図 2.8.1 $a=0.5$ のときの変換音場の透過損失

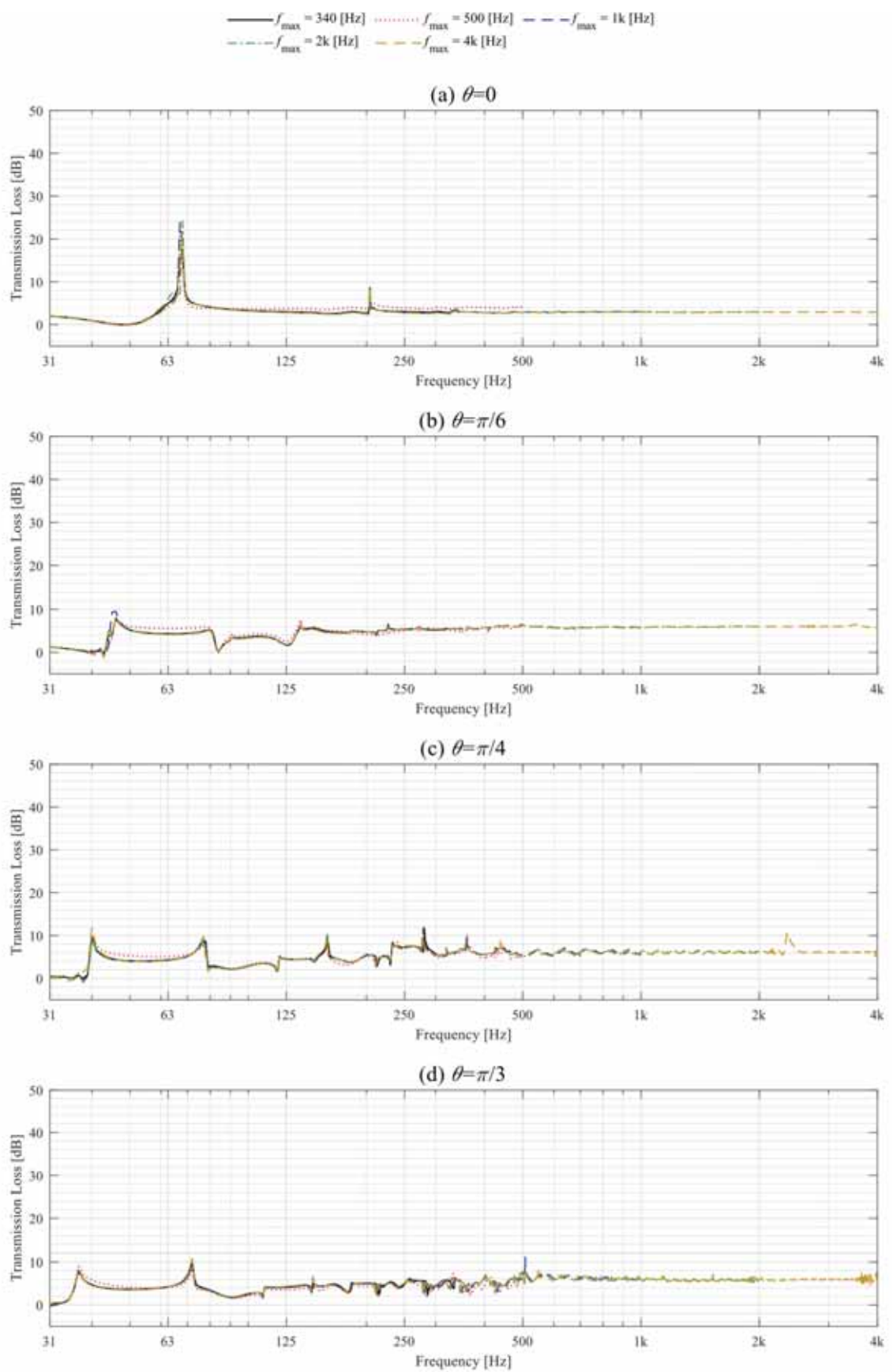


図 2.8.2 $a=2.5$ のときの変換音場の透過損失

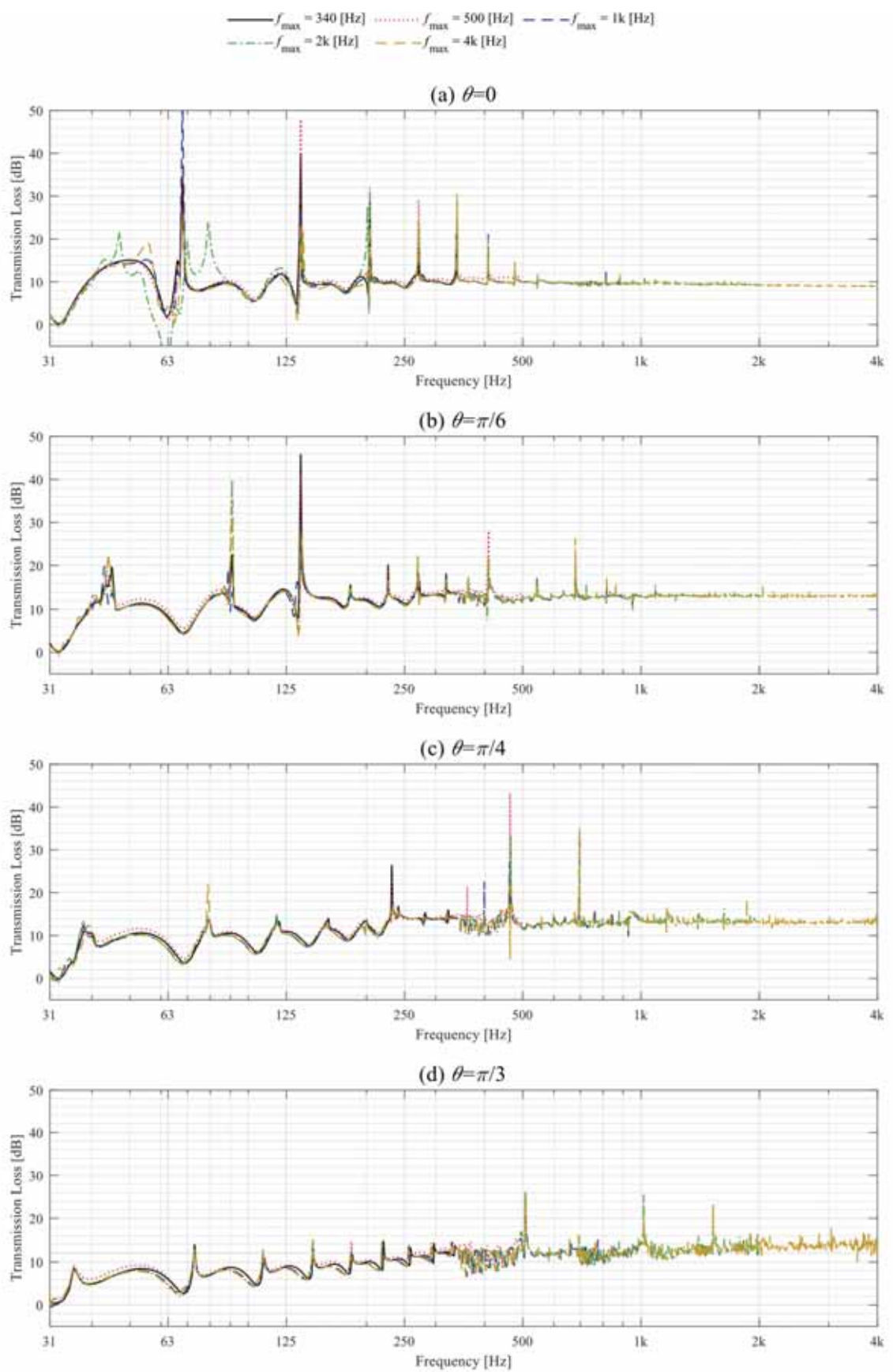


図 2.8.3 $a=4.5$ のときの変換音場の透過損失

2.8.3 PML の最適化

2.7 章では、変換音場において伝搬角ごとに位相速度が異なることや2つの解の干渉により、入力された音波が通常音場とは異なる動きをするということが示された。分散性を議論した 2.7 章の支配式は 2.7.1 節で与えたように PML を実装していないが、PML を境界に配置した変換音場でも同様に音波の挙動は通常音場と違う可能性がある。ここで、変換音場に適した PML を新たに設定する必要があると考えられる。

2.6 章、2.8.1 節で実装した PML は 2.2.4 節の式(2.2.23)に減衰係数最大値 $\eta_{\max}=0.280$ を代入した関数を用いている。このときの音源は点音源であったが、本節では変換音場に平面波音源を入力した際の、PML の層数 $N=32$ [層]、テーパ乗数 $\tau=4$ の場合の式(2.2.23)の減衰係数最大値の最適値を入射角ごとに算出する。

図 2.8.4 の2つ解析領域を考える。図 2.8.4 (a)の解析領域は変換音場において上下の境界に PML、左右の境界に連続境界を実装する。空間離散化幅、時間離散化幅はそれぞれ $\Delta x=\Delta y=5.0\times 10^{-2}$ [m]、 $\Delta t=1.0\times 10^{-4}$ [s]とした。連続境界により x 方向は 1 セルのみの大きさで平面波音源を表すことができるため、 x 方向の長さは $x_{\max 0}=\Delta x=0.05$ m とした。また、 y 方向の長さは $y_{\max 0}=5$ m とした。一方、音圧時間応答を真値とする図 2.8.4 (b)の解析領域は変換音場において上下の境界は剛とし、左右の境界に連続境界を実装する。 y 方向の長さは剛境界からの反射波の影響をなくするために $y_{\max 0}=40$ m とした。音源、受音点はともに y 方向の中心に配置し、入射角は $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad]とする。入力する音源波形のガウシアンパルスは $f_{\max}=340$ のときに用いたガウシアンパルスの最大値 $m=1.0$ [m²/s]、ガウシアンパルスの急峻さを表す係数 $C=2.0\times 10^6$ 、ガウシアンパルスの中心時刻 $t=3.0\times 10^{-3}$ [s]を与えた。図 2.8.4 (a)の解析領域の音圧と真値との差の最大値が最小となる有効数字 3 桁までの η_{\max} [-]を最適値として採用する。

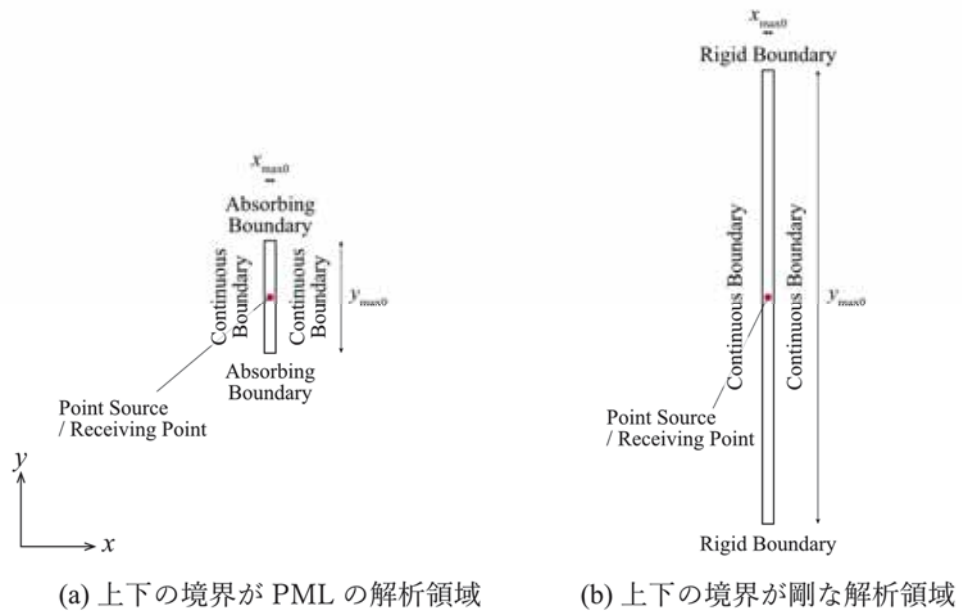


図 2.8.4 解析領域

図 2.8.5 は受音点での音圧時間応答，図 2.8.6 は受音点での音圧の真値との誤差の最大値の推移を入射角，減衰係数最大値ごとに示したものである。図 2.8.5 でいずれの入射角の場合も有効数字 3 桁での各結果において η_{\max} ごとに波形の大きな違いはみられなくなる。これらの結果から音源を平面波としたときの変換音場における各入射角の減衰係数最大値を表 2.8.4 のように決定する。点音源の $\eta_{\max}=0.280$ と比較して入射角が大きくなるほど η_{\max} の最適値が小さくなることがわかる。

表 2.8.4 平面波音源の減衰係数最大値

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
η_{\max} [-]	0.225	0.128	0.0923	0.0424

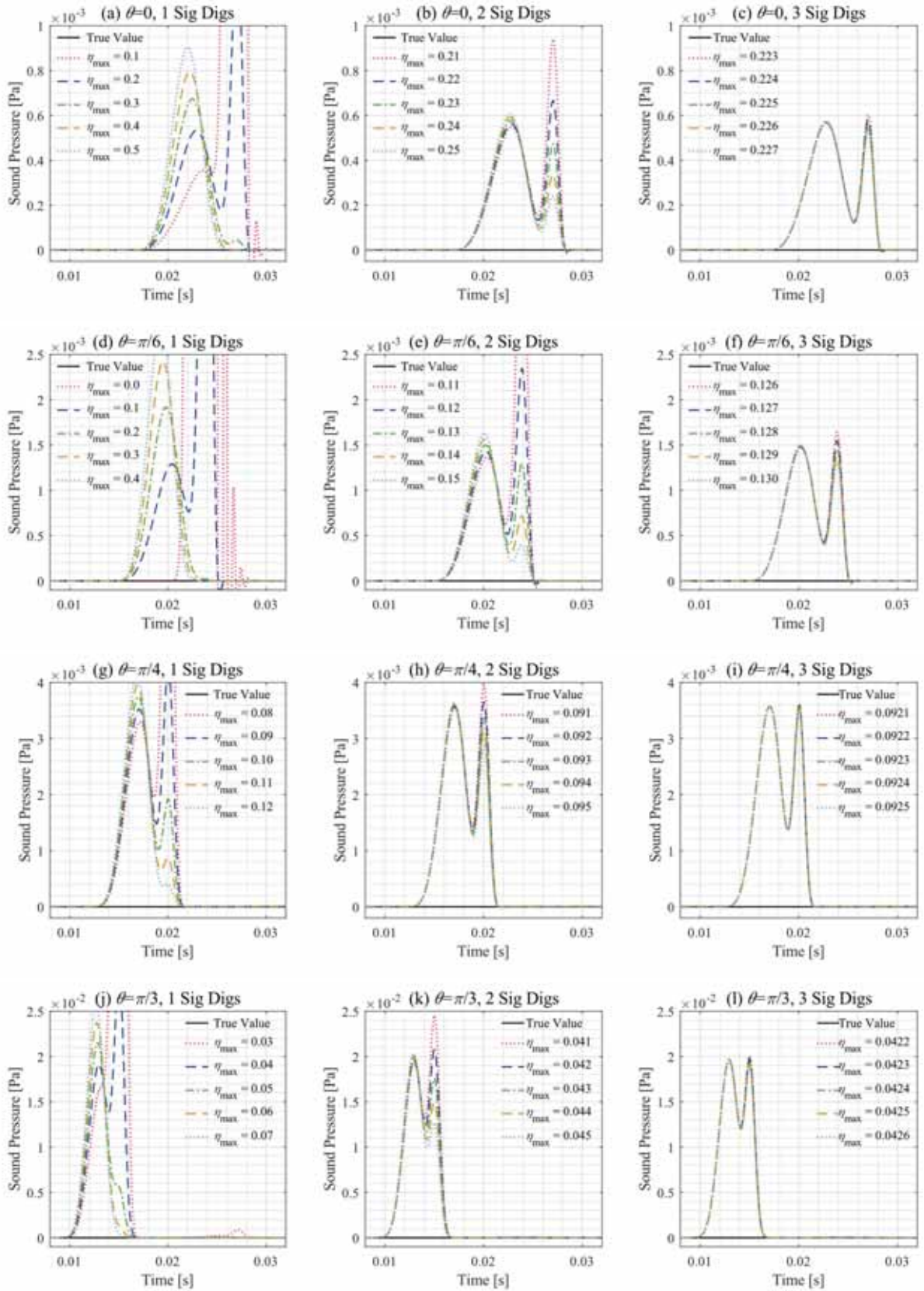


図 2.8.5 入射角，減衰係数最大値ごとの受信点での音圧時間応答

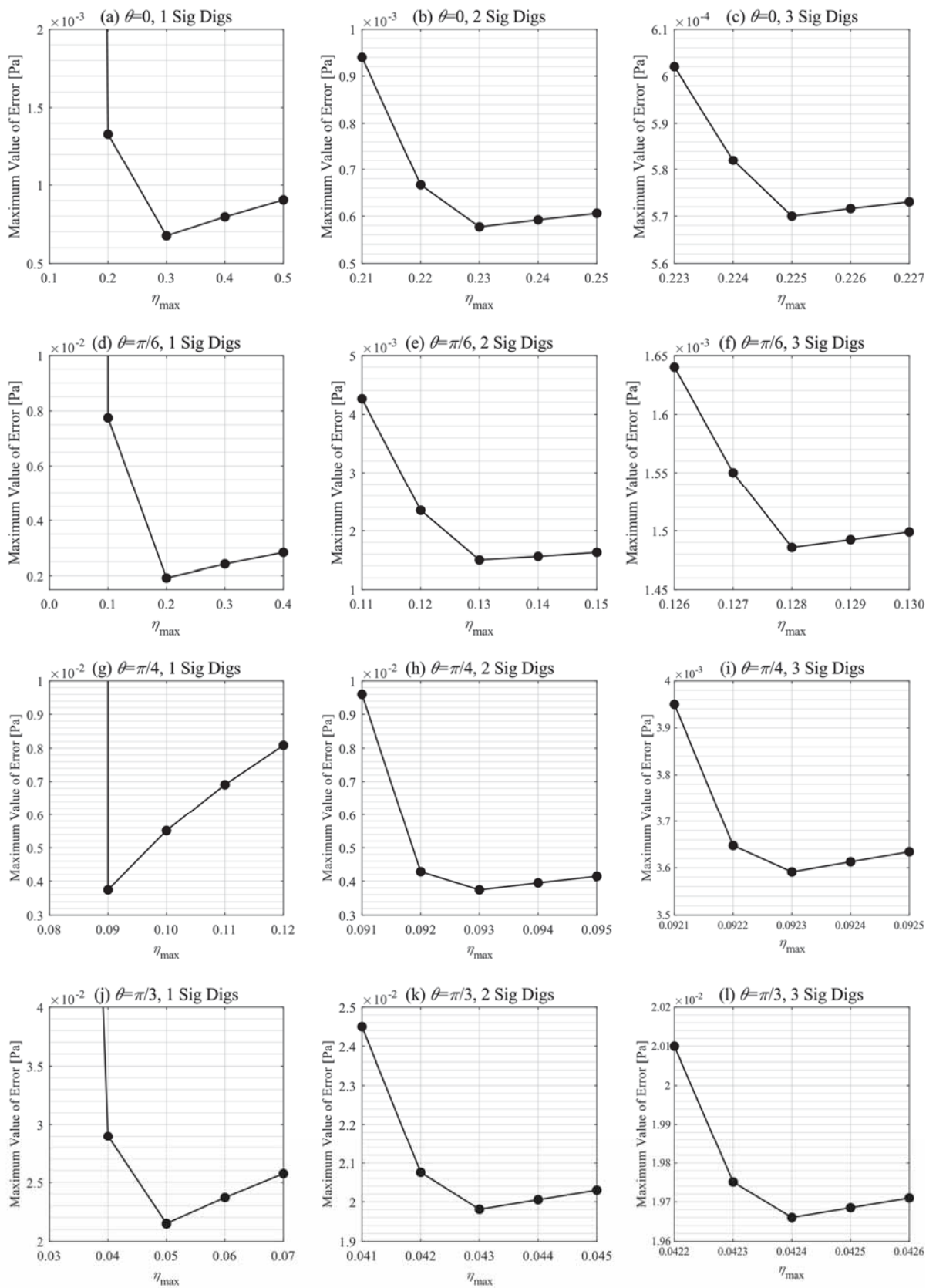


図 2.8.6 入射角，減衰係数最大値ごとの受信点での音圧の真値との差のピーク値の推移

図2.8.7に真値の音圧時間応答, 最適化前後のPMLをそれぞれ用いた際の音圧時間応答を示す。図より, いずれのPMLを実装した場合も直接波に対して反射波は十分に小さい。さらに, 各図の右上に反射波の音圧を詳細に観測するために縦軸の最大値を小さくした図を示す。PMLの最適化により $\eta_{\max}=0.280$ のPMLを用いたときよりも反射波を小さくすることができたことが見て取れる。

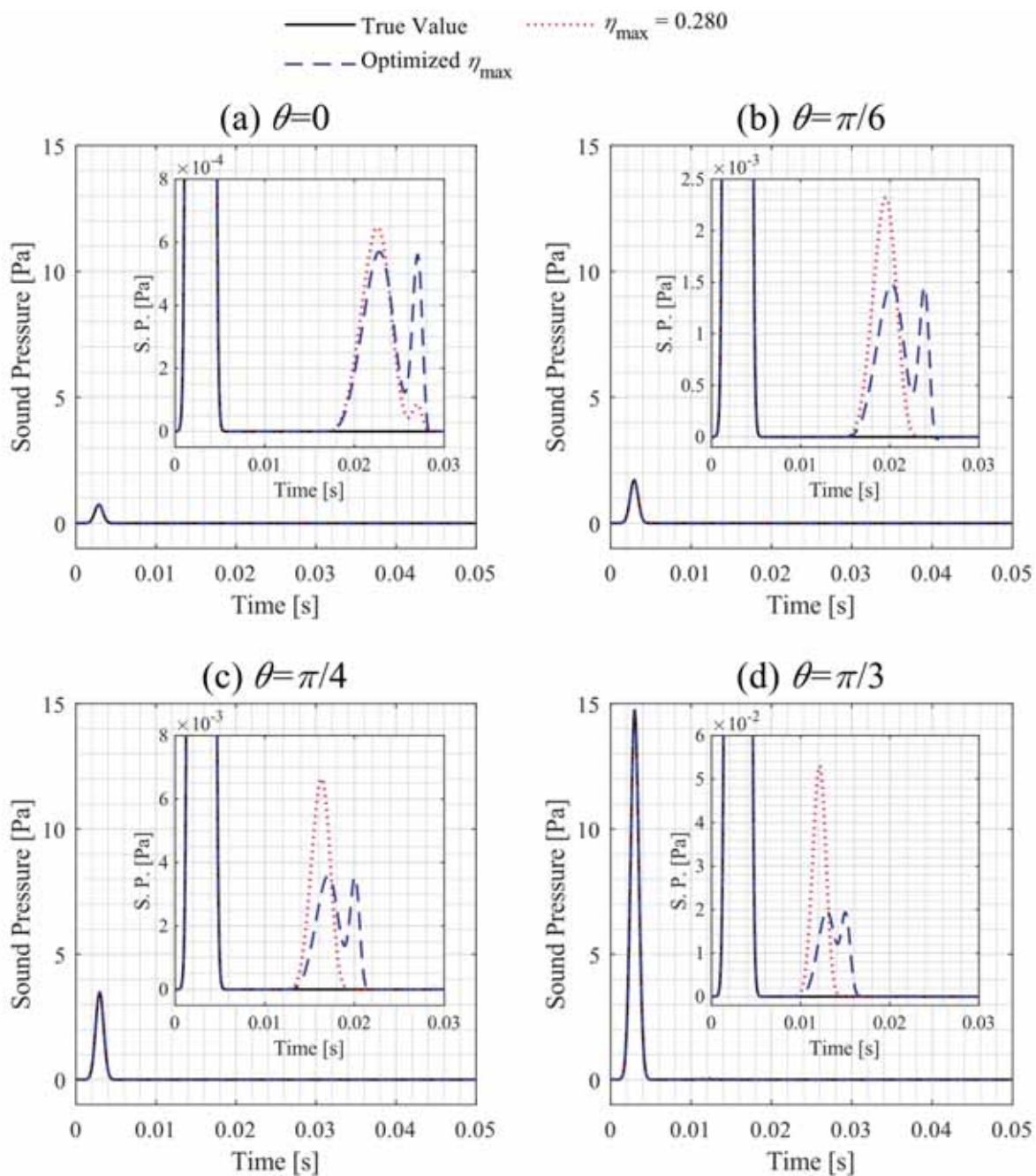


図 2.8.7 真値と各減衰係数最大値を設定したときの音圧応答

ここで、PMLの最適化の精度を検証する。表2.8.5に最適化前後のPMLをそれぞれ用いた際の直接波の音圧のピーク値 p_{dmax} と反射波の音圧のピーク値 p_{rmax} 、さらにこれらのピーク値の比 p_{rmax}/p_{dmax} を示す。入射角が大きくなるほどPMLの性能が改善されたことがわかる。

表 2.8.5 直接波と反射波の音圧のピークの比

θ [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	
p_{dmax} [Pa]	7.40×10^{-1}	1.71×10^0	3.48×10^0	1.47×10^1	
$\eta_{max}=0.280$	p_{rmax} [Pa]	6.47×10^{-4}	2.32×10^{-3}	6.65×10^{-3}	5.30×10^{-2}
	p_{rmax}/p_{dmax} [-]	8.75×10^{-4}	1.36×10^{-3}	1.91×10^{-3}	3.60×10^{-3}
η_{max} の最適値	p_{rmax} [Pa]	5.70×10^{-4}	1.49×10^{-3}	3.58×10^{-3}	1.97×10^{-2}
	p_{rmax}/p_{dmax} [-]	7.71×10^{-4}	8.69×10^{-4}	1.03×10^{-3}	1.33×10^{-3}

図2.8.8に最適化前後のPMLをそれぞれ用いた際の、一辺の長さが $a=0.5, 2.5, 4.5$ [m]四方の散乱体が配置されているときの入射角 $\theta=0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad]の場合の透過損失を示す。最適化の前後でピークの大きさが異なる箇所はあるが、その他の部分に大きな違いは見られない。したがって、通常音場と変換音場の透過損失や音圧分布の差異にPMLの影響は大きくなかったと考えられる。

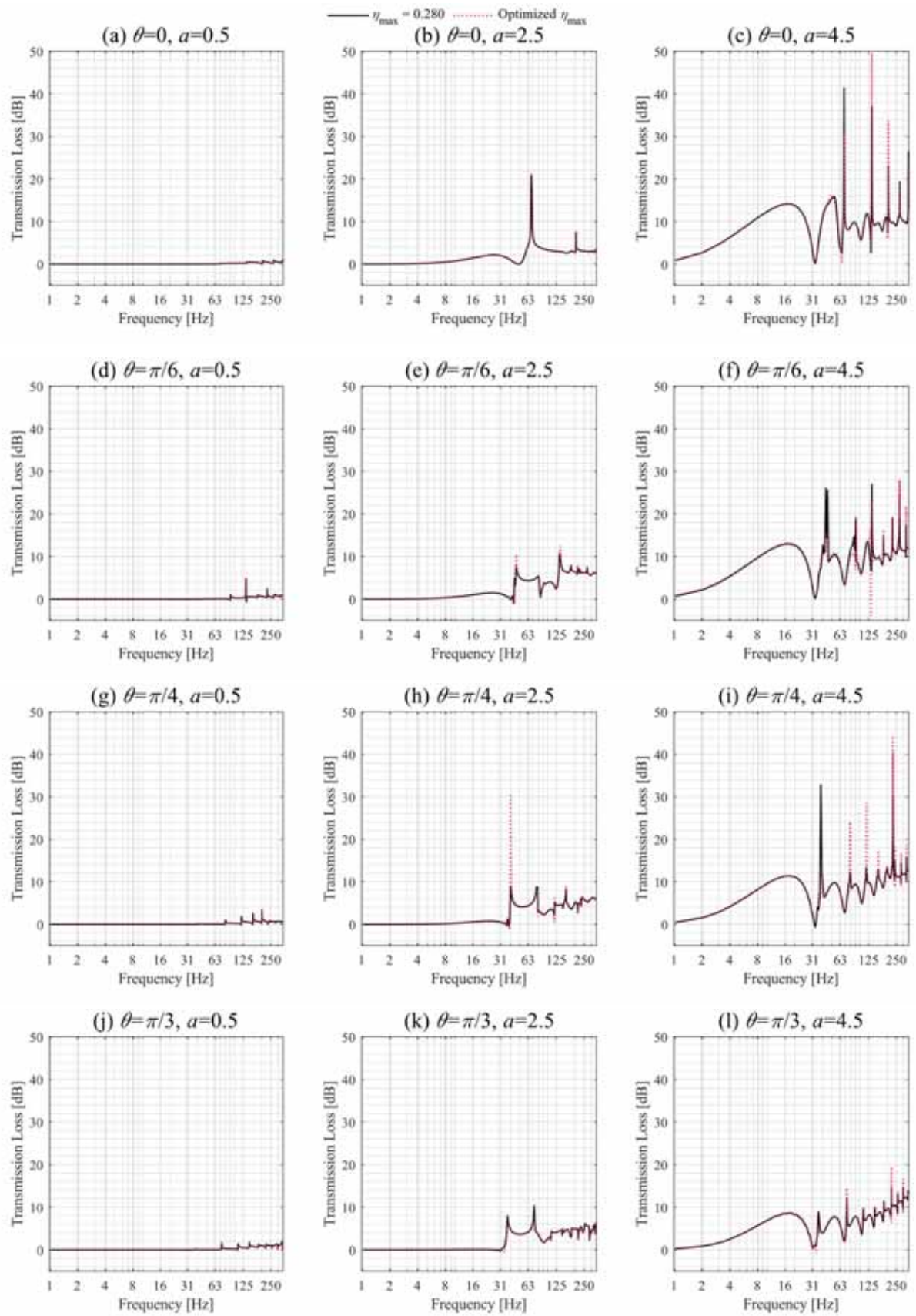


図 2.8.8 PML の最適化前後の透過損失

図 2.8.3 (a)の $f_{\max}=2\text{k}, 4\text{k}$ [Hz]の低域における透過損失のずれに PML が及ぼした影響について検討する。図 2.8.9 に最適化前後の PML をそれぞれ用いた際の、 $a=4.5$ [m]四方の散乱体が配置されているときの入射角 $\theta=0$ [rad]の場合の透過損失を示す。PML の減衰係数最大値を変更したことにより、低域において、透過損失のずれは解消できたといえる。本節の PML の最適化は安定した結果が得られるため、今後の解析に有効である。さらに高精度な結果を得るためには、PML の層数を増やす等の検証が必要であると考えられる。

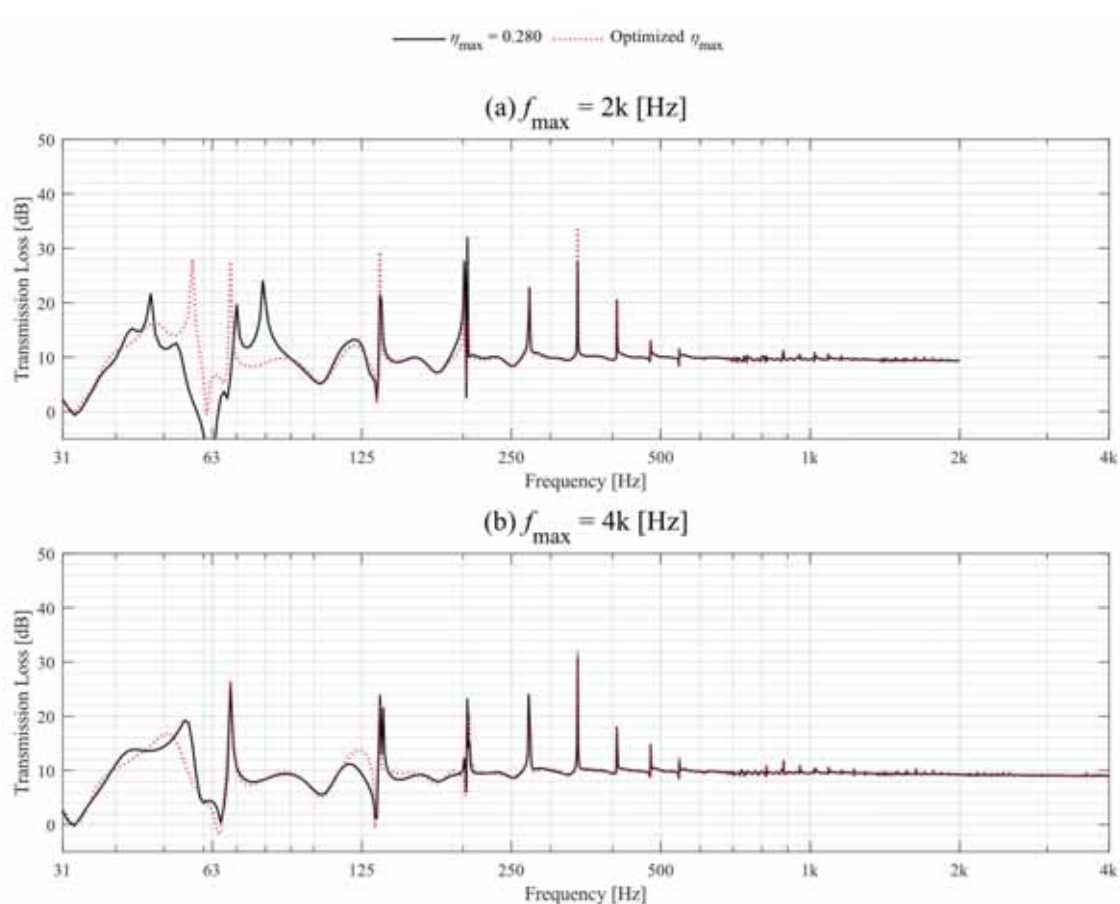


図 2.8.9 PML の最適化前後の $a=4.5$ のときの変換音場の透過損失

2.9 まとめ

第2部では、2次元音場において散乱体が1次元的に周期配置された構造に平面音波が斜入射するときのFDTD法を用いた2通りの解析方法について調査した。1つは構造全体を考慮して、もう1つは単位構造のみを考慮して、構造全体の特性を評価する方法である。

はじめに、周期構造全体を従来のFDTD法で評価する方法を検討し、これを通常音場と呼ぶこととした。通常音場では無限個に近い数の散乱体を並べ非常に広い解析範囲を設定する必要があったが、透過損失の解析によりこの散乱体の最適な個数を決定した。解析範囲が広がると計算時間が長くなるだけでなく、FDTD法が近似によって数値解を得る際に生じる計算誤差が積み重なり大きくなることがわかった。

次に、電磁場で提案されている手法の音場への適用を試み、これを変換音場と呼ぶこととした。周期構造全体から単位構造を取り出し、安定性を適用するとともに、単位構造同士の位相差をなくすという手法である。その手順として、最初に単位構造中の音圧・粒子速度を支配する支配式を位相差を考慮した補助変数を用いて変換し、次にそれらを適切に離散化するためのデュアルグリッドを導入した。

通常音場と変換音場の透過損失や音圧分布を比較した結果、両者の良好な一致が確認された。しかしながら、入射角により誤差の程度がさまざまであることが読み取れた。これは、変換音場では位相速度が通常音場の音速とは異なり、その結果分散性が生じるためである。分散性について理論的な解析方法と数値的な解析方法のそれぞれで検討した。理論的な分散解析では変換音場では伝搬角によって位相速度が変化し、入射角が大きいほどこの傾向は大きくなることが導かれた。また、斜入射の場合には位相速度が大きくなるため、変換音場では通常音場よりも細かい時間離散化幅を採用しなければ解が安定しないということが示された。数値的な分散解析では離散化した支配式を用いて伝搬角や位相速度を求めた。理論的な分散解析と同様に入射角が大きくなると位相速度の通常音場との誤差が大きくなることが示された。さらに、この数値的な解析により得られた安定条件は理論的な解析で得られた安定条件よりも緩んだ結果が得られた。また、変換音場では2個の解が常にあり、それぞれが干渉しあっていることがわかった。

変換音場は通常音場よりも計算コストが大幅に削減できることがわかった。変換音場の導入により、通常音場では解析ができなかったより高域までの解析が可能となり、高域までの安定した解を得ることができた。本手法は無限個の構造を近似して解析する新しい方法のひとつとして従来のFDTD法よりも効率的に斜入射音場を解析できることが示唆された。今後は第1部の条件の周期構造遮音壁を第2部の斜入射解析で評価することが課題である。

参考文献

- [1] Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. *Phys Rev Lett* 1987;58:2059–62.
- [2] John S. Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices. *Phys Rev Lett* 1987;58:2486–9.
- [3] Soukoulis CM. *Photonic Band Gaps and Localization*. New York: Plenum; 1993.
- [4] Taflove A. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3rd ed. London: Artech House; 2005.
- [5] Diest K. *Numerical Methods for Metamaterial Design*. Netherlands: Springer; 2013.
- [6] Craster R V., Guenneau S. *Acoustic Metamaterials*. Netherlands: Springer; 2013.
- [7] Kushwaha MS, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B. Theory of acoustic structure of periodic elastic composites. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 1994;49:2313–22.
- [8] Kushwaha MS, Halevi P. Band-gap engineering in periodic elastic composites. *Appl Phys Lett* 1994;64:1085–7. <https://doi.org/10.1063/1.110940>.
- [9] Tanaka Y, Tamura S. Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 1998;58:7958–65.
- [10] Tanaka Y, Tamura S. Acoustic stop bands of surface and bulk modes in two-dimensional phononic lattices consisting of aluminum and a polymer. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 1999;60:13294–7.
- [11] Wu TT, Huang ZG, Lin S. Surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystal consisting of materials with general anisotropy. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2004;69:0943011–110. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.094301>.
- [12] Tanaka Y, Tomoyasu Y, Tamura S. Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2000;62:7387–92.
- [13] Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Yeyati AL, Lambin P, Khelif A, Vasseur JO, et al. Evidence of Fano-like interference Phenomena in Locally Resonant Materials. *Phys Rev Lett* 2002;88:2255021–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.225502>.
- [14] Kosevich YA, Goffaux C, Sánchez-Dehesa J. Fano-like resonance phenomena by flexural shell modes in sound transmission through two-dimensional periodic arrays of thin-walled hollow cylinders. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2006;74:0123011–4.

- <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.012301>.
- [15] Pennec Y, Djafari-Rouhani B, Larabi H, Vasseur JO, Hladky-Hennion AC. Low-frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2008;78:1041051–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.104105>.
- [16] Sánchez-Pérez J V, Caballero D, Martínez-Sala R, Rubio C, Sánchez-Dehesa J, Meseguer F, et al. Sound Attenuation by a Two-Dimensional Array of Rigid Cylinders. *Phys Rev Lett* 1998;80:5325–8.
- [17] Vasseur JO, Deymier PA, Chenni B, Djafari-Rouhani B, Dobrzynski L, Prevost D. Experimental and Theoretical Evidence for the Existence of Absolute Acoustic Band Gaps in Two-Dimensional Solid Phononic Crystals. *Phys Rev Lett* 2001;86:3012–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3012>.
- [18] Sun JH, Wu TT. Analyses of mode coupling in joined parallel phononic crystal waveguides. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2005;71:1743031–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.174303>.
- [19] Kafesaki M, Sigalas MM, García N. Frequency Modulation in the Transmittivity of Wave Guides in Elastic-Wave Band-Gap Materials. *Phys Rev Lett* 2000;85:4044–7.
- [20] Khelif A, Djafari-Rouhani B, Vasseur JO, Deymier PA, Lambin P, Dobrzynski L. Transmittivity through straight and stublike waveguides in a two-dimensional phononic crystal. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2002;65:1743081–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.174308>.
- [21] Khelif A, Djafari-Rouhani B, Vasseur O, Deymier PA. Transmission and dispersion relations of perfect and defect-containing waveguide structures in phononic band gap materials. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2003;68:0243021–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.024302>.
- [22] Pennec Y, Djafari-Rouhani B, Vasseur JO, Khelif A, Deymier PA. Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders. *Phys Rev E - Stat Physics, Plasmas, Fluids, Relat Interdiscip Top* 2004;69:0466081–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.046608>.
- [23] Sun JH, Wu TT. Analyses of Surface Acoustic Wave Propagation in Phononic Crystal Waveguides using FDTD Method. *Proc - IEEE Ultrason Symp* 2005;1:73–6. <https://doi.org/10.1109/ULTSYM.2005.1602799>.
- [24] Sun JH, Wu TT. Propagation of surface acoustic waves through sharply bent two-dimensional phononic crystal waveguides using a finite-difference time-domain method. *Phys Rev B - Condens Matter Mater Phys* 2006;74:1743051-174305–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.174305>.
- [25] Veysoglu ME, Shin RT, Kong JA. A Finite-Difference Time-Domain Analysis of Wave Scattering

- from Periodic Surfaces: Oblique Incidence Case. *J Electromagn Waves Appl* 1993;7:1595–607.
<https://doi.org/10.1163/156939393X00020>.
- [26] Roden JA, Gedney SD, Kesler MP, Maloney JG, Harms PH. Time-Domain Analysis of Periodic Structures at Oblique Incidence: Orthogonal and Nonorthogonal FDTD Implementations. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES* 1998;46:420-7.
- [27] 豊田政弘, 坂本慎一, 横田考俊, 朝倉巧, 長谷芳樹, 細川篤, 木村友則, 青柳貴洋, 田原麻梨江, 竹本浩典, 土屋健伸, 鶴秀生, “FDTD法で視る音の世界”, コロナ社, 2015.
- [28] 宮下豊勝, 井上智隆, “音響人工結晶の透過特性および導波特性の FDTD 法による評価”, 電子情報通信学会技術研究報告, 2000;100:47-53.
- [29] 田口大悟, “FDTD 法における完全吸収層(PML)の減衰量”, 関西大学卒業論文, 2016.
- [30] 日比野真之, “FDTD法における完全吸収層の最適化”, 関西大学卒業論文, 2018.
- [31] Sakamoto S. Phase-error analysis of high-order finite difference time domain scheme and its influence on calculation results of impulse response in closed sound field. *Acoust Sci Technol* 2007;28:295–309. <https://doi.org/10.1250/ast.28.295>.

謝辞

本論文をまとめるにあたり、豊田准教授には丁寧なご指導ご鞭撻を賜りました。沢山のお時間をさいいただき、研究に取り組むことができました。厚くお礼を申し上げます。河井教授，原教授にも貴重なご助言をいただきました。深く感謝いたします。建築環境工学第 I 研究室のみなさまにもお世話になりました。本当にありがとうございました。