テンションのかかった膜材料の解析

関西大学 環境都市工学部 建築学科 建築環境工学第 I 研究室 建 16-0103 村上 詩歩 指導教官 豊田 政弘 准教授

目次

1	はじめに	1
	1.1 研究背景	1
	1.2 既往研究	2
	1.3 研究目的	3
	1.4 研究方法	3
2	計算方法	4
	2.1 真空中における解析解	4
	2.2 真空中における FDTD 法	6
	2.3 空気中における解析解	7
	2.4 空気中における FDTD 法	10
	2.5 時間領域から周波数領域への変換	12
3	計算結果	13
	3.1 真空中	13
	3.2 空気中	15
	3.3 考察	16
4	おわりに	17
参	考文献	18

1 はじめに

1.1 研究背景

近年、膜構造はその優れている耐候性と軽量性、透明度から多くのスポーツ施設などの外壁と して用いられている。しかしながら、音響の観点から見ると膜構造は降雨騒音などに重大な問題が ある。これからより膜構造が普及することを考慮すると、このような問題を解決することは非常に重 要であり、これまでに様々な対策が研究されている。それらの対策の有効性を示すためにも膜構 造の解析が必要とされている。 1.2 既往研究

膜構造の降雨騒音の問題について、Toyodaら[1]はフッ素樹脂であるETFE(テトラフルオロエチ レン)を使用した膜構造の降雨騒音に対するシリコンゲルシート、不織布を用いた対策の調査を行 い、降雨騒音の低減の可能性を報告している。この研究では理論的考察の計算方法として解析 解を用いており、そこではダクトの中に4つの層を考慮した2つの空洞を持つ3重膜構造を解析 モデルとした調査が行われた。

一方、Asakura ら[2]の研究では板材を対象とし、FDTD 法(時間領域有限差分法)を用いた振動音響連成解析について報告している。壁構造を解析モデルとし、FDTD 法での計算結果とコン クリート構造の加振試験の測定結果を比較することにより、FDTD 法での振動音響連成解析の妥 当性が調査された。 1.3 研究目的

膜構造の解析を行う際、解析解では矩形などの単純な形状しか取り扱うことができない。そのため、本研究では複雑な形状にも対応できる方法を用い、より有用性のある解析を可能にすることを 目的とする。

1.4 研究方法

本研究では、複雑な形状の膜構造にも対応できる方法として FDTD 法を採用する。FDTD 法を 用いた解析結果の妥当性を検討するために、単純な形状のモデルを想定し、解析解と比較する。 ここでは、真空中と空気中における膜構造の解析を対象とする。 2 計算方法

2.1 真空中における解析解

=

図1に解析モデルを示す。膜の端はピン支持とする。まず、膜の振動方程式 $-T\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w(x,y) - \rho h \omega^2 w(x,y) = q(x,y)$ (1.1) を考える。ここで、T:張力[N/m]、w:変位[m]、 ρ :膜材密度[kg/m²]、h:膜厚[m]、 ω :角周波数 [rad/s]、q:外力[N]である。外力はデルタ関数を用いて

$$q(x, y) = q_0 \delta(x - x_0) \ \delta(y - y_0)$$
(1.2)

と表す。外力 q と変位 w を固有関数展開すると

$$w(x,y) = \sum_{mn} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
(1.3)

$$q(x,y) = \sum_{mn} Q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
(1.4)

となる。未知数 Q_{mn} を求めるために(1.4)式の両辺に $\sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi y}{b}$ をかけ、x=1から x=a、y=1から y=bの範囲で積分すると

(左辺) =
$$q_0 \int_0^a \sin \frac{m' \pi x}{a} \delta(x - x_0) dx \int_0^b \sin \frac{n' \pi y}{b} \delta(y - y_0) dy$$

= $q_0 \sin \frac{m' \pi x_0}{a} \sin \frac{n' \pi y_0}{b}$ (1.5)

(右辺) =
$$\sum_{mn} Q_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy$$

$$(m = m', n = n'のときのみ値を持つ)$$

 $\frac{ab}{4}Qm'n'$ (1.6)

となり、(1.5), (1.6)式より
$$Q_{mn}$$
 は
 $Q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} q_0 \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ (1.7)

となる。(1.1)式に(1.3), (1.4)式を代入すると

$$-T\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \sum_{mn} W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} - \rho h \omega^2 \sum_{mn} W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{mn} Q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$
(1.8)

となり、さらに変形すると

$$\Sigma_{mn} \left[T \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} W_{mn} - \rho h \omega^2 W_{mn} - Q_{mn} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$\rightarrow \left[T \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} - \rho h \omega^2 \right] W_{mn} = Q_{mn}$$

$$\rightarrow W_{mn} = \frac{Q_{mn}}{T \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} - \rho h \omega^2}$$
(1.9)

となる。よって変位 w は(1.3)式に(1.9)式を代入し

$$w(x,y) = \sum_{mn} \frac{\frac{4q_0}{ab} \sin\frac{m\pi x_0}{a} \sin\frac{n\pi y_0}{b}}{T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} - \rho h \omega^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$
(1.10)

となる。



図1 真空中の解析モデル

2.2 真空中における FDTD 法

膜の振動方程式

$$-T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f$$
(2.1)

を FDTD 法を用いて微分を差分商で近似すると

$$-T\left\{\frac{w(x+\Delta x,y,t)-2w(x,y,t)+w(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^{2}}+\frac{w(x,y+\Delta y,t)-2w(x,y,t)+w(x,y-\Delta y,t)}{\Delta y^{2}}\right\}$$
$$+\rho h \frac{w(x,y,t+\Delta t)-2w(x,y,t)+w(x,y,t-\Delta t)}{\Delta t^{2}}=f(x,y,t)$$
(2.2)

となる。ここで

$$W(x, y, t) \rightarrow w^{n}(i, j) \qquad \begin{cases} x = i\Delta x \\ y = j\Delta y \\ t = n\Delta t \end{cases}$$
(2.3)

とおくと、

$$-T\left\{\frac{w^{n}(i+1,j)-2w^{n}(i,j)+w^{n}(i-1,j)}{\Delta x^{2}}+\frac{w^{n}(i,j+1)-2w^{n}(i,j)+w^{n}(i,j-1)}{\Delta y^{2}}\right\}+\rho h\frac{w^{n+1}(i,j)-2w^{n}(i,j)-w^{n-1}(i,j)}{\Delta t^{2}}=f^{n}(i,j)$$
(2.4)

となり、この両辺に
$$\Delta t^2/\rho h$$
 をかけ、変形すると、 $n+1$ ステップ目の変位 w は
 $w^{n+1}(i,j) = 2w^n(i,j) - w^{n-1}(i,j) + \frac{T\Delta t^2}{\rho h} \Big[\frac{1}{\Delta x^2} \{ w^n(i+1,j) - 2w^n(i,j) + w^n(i-1,j) \} + \frac{1}{\Delta y^2} \{ w^n(i,j+1) - 2w^n(i,j) + w^n(i,j-1) \} \Big] + \frac{f^{n}(i,j)}{\rho h} \Delta t^2$ (2.5)
となる。これは、 n ステップ目までの値を代入することで $n+1$ ステップ目の変位が求められることを表
しており、逐次的に値を更新することで解を求めることができる。

なお、境界条件は膜の端がピン支持であるため、

 $w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ \ \texttt{L} \emptyset,$

$$w^{n}(i,j) = 0$$

$$w^{n}(i+1,j) - 2w^{n}(i,j) + w(i-1,j) = 0$$

$$w(i-1,j) = -w^{n}(i+1,j)$$

$$\geq t_{a} \leq_{\circ}$$
(2.6)
(2.7)

2.3 空気中における解析解

図2に解析モデルを示す。ダクトの中にある膜に加振を与えたときの放射音を考える。側面は剛 壁であり、上下は無限音場となっている。まず、膜の振動方程式

$$-T\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w(x,y) - \rho h\omega^2 w(x,y) = q_0\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) + P_0(x,y,0) - P_1(x,y,0)$$
(3.1)

を考える。次に、各層での音圧と粒子速度は

$$P_0(x, y, z) = \sum_{mn} P_{0nm}^- e^{-ik_{mn}z} \psi_{mn}(x, y)$$
(3.2)

$$v_0(x, y, z) = \sum_{mn} \frac{k_{mn}}{P_0 \omega} \left(-P_{0mn} e^{-ik_{mn} z} \right) \psi_{mn}(x, y)$$
(3.3)

$$P_1(x, y, z) = \sum_{mn} P_{1nm}^+ e^{ik_{mn}z} \psi_{mn}(x, y)$$
(3.4)

$$v_1(x, y, z) = \sum_{mn} \frac{k_{mn}}{P_0 \omega} \left(P_{1nm}^+ e^{ik_{mn} z} \right) \psi_{mn}(x, y)$$
(3.5)

と表される。
$$w(x,y), q_0\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \phi_{mn}(x,y)$$
にそれぞれ固有関数展開を行うと

$$w(x,y) = \sum_{mn} W_{mn} \phi_{mn}(x,y) \tag{3.6}$$

$$q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \sum_{mn} Q_{mn} \psi_{mn}(x, y)$$
(3.7)

$$\phi_{mn}(x,y) = \sum_{kl} \alpha_{mnkl} \psi_{kl}(x,y) \tag{3.8}$$

となる。このとき、
$$\psi_{mn}(x,y), \phi_{mn}(x,y)$$
は

$$\psi_{mn}(x,y) = \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \quad (m,n=0,1,2...)$$
(3.9)

$$\phi_{mn}(x,y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m,n=1,2,3...)$$
(3.10)

と表される。(3.1)式に(3.2), (3.4), (3.6), (3.7), (3.8)式を代入すると

$$-T\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\sum_{mn}W_{mn}\sum_{mn}\alpha_{mn}\psi_{kl}(x,y) - \rho h\omega^{2}\sum_{kl}W_{mn}\sum_{kl}\alpha_{mnkl}\psi_{kl}(x,y) = \sum_{kl}Q_{kl}\psi_{kl}(x,y) + \sum_{mn}P_{0kl}^{-}\psi_{kl}(x,y) - \sum_{mn}P_{1kl}^{+}\psi_{kl}(x,y)$$

$$(m, n = 1,2,3...,k,l = 0,1,2,...)$$

$$\rightarrow \sum_{kl}\sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}\right]W_{mn}\alpha_{mnkl}\psi_{kl}(x,y)$$

$$= \sum_{kl}(Q_{kl} + P_{0kl}^{-} + P_{1kl}^{+})\psi_{kl}(x,y)$$

$$\geq \delta_{kl}\sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}\right]W_{mn}\alpha_{mnkl}\psi_{kl}(x,y)$$

$$= \sum_{kl}(Q_{kl} + P_{0kl}^{-} + P_{1kl}^{+})\psi_{kl}(x,y)$$

$$\geq \sum_{kl}\sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}\right]W_{mn}\alpha_{mnkl}\psi_{kl}(x,y)$$

$$\Rightarrow \sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}\right]W_{mn}\alpha_{mnkl} = Q_{kl} + P_{0kl}^{-} - P_{1kl}^{+}$$

$$\geq \delta_{kl}\sum_{mn}\sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}$$

$$\geq \delta_{kl}\sum_{mn}\sum_{mn}\left[T\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2}\right\} - \rho h\omega^{2}$$

$$\sum_{mn} X_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} = Q_{kl} + P_{0kl}^{-} - P_{1kl}^{+}$$
(3.11)

となる。このとき、 α_{mnkl}, Q_{kl} は

$$\alpha_{mnkl} = \begin{cases} \frac{mn}{\pi^2 (m^2 - k^2)(n^2 - l^2)} \times \begin{cases} 4 \ (k = l = 0) \\ 8 \ (k = 0, l \neq 0 \ \text{‡} \land \text{i} \land k \neq 0, l = 0) \\ 16 \ (k \neq 0, l \neq 0) \\ (m + k, n + l \, \text{が共に奇数}) \\ 0 \ (m + k, n + l \, \text{のいずれか}, \text{もしくは共に偶数}) \end{cases}$$
(3.12)

$$Q_{kl} = \begin{cases} \frac{q_0}{ab} & (k = l = 0) \\ \frac{2q_0}{ab} \psi_{kl}(x0, y0) & (k = 0, l \neq 0 \ \text{\ddagger} \text{tit} \ k \neq 0, l = 0) \\ \frac{4q_0}{ab} \psi_{kl}(x0, y0) & (k \neq 0, l \neq 0) \end{cases}$$
(3.13)

である。

一方、境界条件は膜の振動速度
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i\omega w$$
 を用いて
 $-i\omega w = v_0(x, y, z) = v_1(x, y, z)$ (3.14)
となる。(3.3), (3.5), (3.6), (3.8), (3.14)式より

(3.15)

$$\begin{split} \sum_{kl} K_{kl}(-P_{0kl}^{-})\psi_{kl}(x,y) &= \sum_{kl} K_{kl} P_{1kl}^{+}\psi_{kl}(x,y) \\ &= -i\omega \sum_{mn} W_{mn} \sum_{kl} \alpha_{mnkl} \psi_{kl}(x,y) \\ \rightarrow \begin{cases} P_{0kl}^{-} &= \frac{i\omega}{K_{kl}} \sum_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} \\ P_{1kl}^{+} &= -\frac{i\omega}{K_{kl}} \sum_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} \end{cases} \\ \geq t_{k} \otimes_{\circ} z z \subset \varsigma, \\ K_{kl}^{-} &= \frac{k_{kl}}{P_{0}\omega} \end{cases}$$
(3.17)
$$\forall b \otimes_{\circ} (3.11) \neq t z (3.15), (3.16) \neq t \in t, \lambda \neq \delta \geq 2 \\ \sum_{mn} X_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} = Q_{kl} + \frac{2i\omega}{K_{kl}} \sum_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} \\ \geq t_{k} \otimes_{\circ} \sum_{mn} (W_{mn} \alpha_{mnkl}) = Q_{kl} + \frac{2i\omega}{K_{kl}} \sum_{mn} W_{mn} \alpha_{mnkl} \end{cases}$$

$$\sum_{mn} \left(X_{mn} - \frac{2i\omega}{\kappa_{kl}} \right) W_{mn} \alpha_{mnkl} = Q_{kl}$$
(3.18)

と変形される。(3.18)式を行列表示にすると

$$\left[\left(X_{mn} - \frac{2i\omega}{\kappa_{kl}} \right) \alpha_{mnkl} \right] \left[W_{mn} \right] = \left[Q_{kl} \right]$$
(3.19)

となり、この連立方程式を解くことで未知数である変位 Wmn が求められる。



図2 空気中の解析モデル

2.4 空気中における FDTD 法

図 3 に解析モデルを示す。側面は剛壁であり、底面は PML(完全吸収層)となっている。膜の振動方程式

$$-T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + \Delta p \tag{4.1}$$

と、運動方程式

 $\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$ (4.2)

ならびに、連続の式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\kappa_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{4.3}$$

を用いて考える。ここで、 ρ_0 は空気密度、 κ_0 は空気の体積弾性率である。(4.2)式を FDTD 法を用いて微分を差分商で近似すると、

で求められる。(4.4), (4.5)式を交互に更新することで、逐次的に解を求めることができる。

なお、膜の境界条件は

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ \ \, \& \vartheta \,,$$

$$w^n \, (i,j) = 0 \tag{4.6}$$

$$w^n \, (i+1,j) - 2w^n \, (i,j) + w \, (i-1,j) = 0$$

$$w(i-1,j) = -w^{n}(i+1,j)$$
(4.7)

となり、空気の境界条件は剛な境界では境界上の粒子速度が常に0となるため、

$$v_x = 0, v_y = 0$$
 (4.8)

となる。また、膜と空気の境界では、膜に空気からの圧力が加わるため、(4.1)式の右辺には音圧差 Δp が加わっていることに注意が必要である。



図3 空気中の解析モデル

2.5 時間領域から周波数領域への変換

2.2,2.4節で求めた FDTD 法での計算結果を時間領域から周波数領域に変換する。より正確に 解析領域の値を変換するために、時間領域での応答に次式で表されるハミング窓関数を掛け合 わせた後、FFT を行った。

 $w(x) = 0.54 - 0.46\cos(x+1)\pi \quad (0 \le x \le 1)$ (5.1)



3 計算結果

FDTD 法による計算結果の妥当性を確認するため、単純な解析モデルを用いて解析解と比較する。膜材の仕様を表1に示す。

表1 膜材の仕様

	膜材
膜密度[kg/m ³]	1760.0
膜厚[m]	0.00025
張力[N/m]	500.0
x 軸方向長さ[m]	2.7
y 軸方向長さ[m]	1.8

3.1 真空中

離散化範囲は x 軸 2.7 m, y 軸 1.8 m, 解析時間は 3 s とし、空間離散化幅は Δx, Δy はいずれ も 0.01 m、時間離散化幅は 0.000001 s とする。加振点と受振点は(1.35 m, 0.9 m)(膜中央)とする。 加振はガウシアンパルス

 $f^n(i_{dr}, j_{dr})e^{-a(n\Delta t - t_0)^2}$

とし、a=10000000 (パルス幅), t₀=0.001 [s] (パルス位置)を用いる。

FDTD 法での計算結果を図 5 に示す。得られた時間領域の計算結果を 2.5 節の方法を用いて 周波数領域に変換した FDTD 法の計算結果と解析解を比較したものを図 6 に示す。









3.2 空気中

離散化範囲は x 軸 2.7 m, y 軸 1.8 m, z 軸 0.7 m, 解析時間は 3 s とし、空間離散化幅は Δx, Δy, Δz いずれも 0.01 m、時間離散化幅は 0.000001 s とする。空気の音速は 340 m/s、空気の密度は 1.2 kg/m³,加振点は(1.35 m, 0.9 m)(膜中央)、受振点は(1.35 m, 0.9 m, 0.6 m)(膜中央から 0.6 m 離れた点)とする。加振はガウシアンパルス

 $f^n(i_{dr}, j_{dr})e^{-a(n\Delta t - t_0)^2}$

とし、a=10000000 (パルス幅), t₀=0.001 [s] (パルス位置)を用いる。

FDTD 法での計算結果を図 7 に示す。真空中と同様に周波数領域に変換した FDTD 法の計算結果と解析解を比較したものを図 8 に示す。



図7空気中におけるFDTD法の計算結果



図8空気中の計算結果

3.3 考察

真空中の計算結果は低周波数帯では概ね一致していると判断できる。高周波数帯では 2 つの グラフの振幅に差が見られるが、これは解析解では無限秒まで計算できるが FDTD 法では解析時 間が限られているためであると考えられる。このことから 2 つの計算結果は比較的一致しており、真 空中の FDTD 法による計算の妥当性は確認できたと判断される。

空気中の計算結果についてはピークディップが現れる周波数の値はおおよそ一致しているが、 空気中の計算結果と比較すると精度の低い結果となっている。これは、離散化による数値分散誤 差、あるいは無限音場をFDTD法で解析するために吸収境界として用いた完全吸収層による誤差 である可能性が考えられる。 4 おわりに

本研究ではFDTD 法を用いた膜構造の数値解析を行った。真空中での解析は解析解とFDTD 法での計算結果を比較した結果、比較的一致していると考えられ、その妥当性が示された。一方、 空気中での解析解とFDTD 法での計算結果の比較は真空中ほどの精度は得られなかった。騒音 の対策の検討が目的であるため、空気中での妥当性が重要であり、より正確な計算結果を得る必 要がある。また、本研究での数値解析の加振波形はガウシアンパルスを用いており、降雨騒音の 検討を行うのであれば加振波形は雨粒と類似したものとし、加えて単加振であるべきではない。今 後はこれらを考慮した解析を行うことが課題である。

参考文献

- [1] Toyoda et al., Reduction of rain noise from Ethylene/TetraFluoroEthylene membrane structures, Applied Acoustics 74, pp.1309-1314,2013
- [2] Asakura et al., Prediction of low-frequency structure-borne sound in concrete structures using the finite-difference time-domain method, J. Acoust. Soc. Am 136(3), pp.1085-1100,2014