

幾何音響理論の改善

関西大学環境都市工学部建築学科

建築環境工学第 I 研究室

建 16-49 小林 愛佳

指導教員 豊田 政弘

河井 康人

目次

1. 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 既往研究	2
1.3 研究背景	3
1.4 論文構成	4
2. 研究手法	5
2.1 波動音響理論	5
2.1.1 時間領域有限差分法	5
2.2 幾何音響理論	10
2.2.1 音線法	10
2.2.2 虚像法	18
2.2.3 バックトレース法	21
3. 計算結果	23
3.1 モデル 1	25
3.2 モデル 2	27
3.3 モデル 3	29
3.4 モデル 4	31
4. 考察	33
5. 結論	34

参考文献

第1章 序論

1.1 研究背景

音場解析の手法は幾何音響理論と波動音響理論に分けられる。幾何音響理論とは音の波動性を無視して、そのエネルギーの発生・伝搬・拡散・消散を幾何学的に取り扱うもので、波動音響理論とは室内の周壁の音響インピーダンスを境界条件として、波動方程式またはその基になる式を解く手法のことである。二種類の解析手法にはそれぞれメリットとデメリットがある。幾何音響理論のメリットは音をエネルギー的に扱うため計算が容易であるということであるが、デメリットは音の波動性を考慮できないため、音の波動現象が現れやすい低音域では誤差が生じる可能性が高いということである。一方、波動音響理論は音を音波として扱い波動方程式を解いて計算を行うため、正確な計算が可能なのがメリットであるが、高音域では計算量が膨大になり計算にかなり時間がかかる点がデメリットである。これらのメリットとデメリットを理解して、解析対象の空間や物体に見合った解析手法を選択することが必要である。コンサートホールなどの大規模空間の音場解析には、計算が容易な幾何音響理論を用いられることが多いが、低音域での誤差が問題である。一方で、波動音響理論を用いると現在の計算性能では全ての可聴周波数を対象とした計算することが難しい。これより、大規模空間の音場解析は、計算量を減らし、全音域で正確な解析ができるよう解析技術の開発が望まれている。

1.2 既往研究

Granier ら[1]は車室内の音場解析において、低音域での波動音響理論の解析手法と、中・高音域での幾何音響理論の解析結果を結合させた、ハイブリッドコンピュータシミュレーションに関する検討を行った。

また、文屋ら[2]により、開領域のための幾何音響理論と波動音響理論の結合解法が提案されている。ただしこの提案は、対象空間が開領域であることに加えて、空間領域で幾何音響理論と波動音響理論の計算する範囲を分けている。

二つの異なる手法を組み合わせるといふ考え方は古くからあるはずだが、これら以外にハイブリッド解析手法に関する既往研究はあまり見られない。その理由として、幾何音響理論と波動音響理論の根本的な考え方が異なるため、単純に二つの手法を組み合わせることができないからだと考えた坂吉[3]は低音域における波動音響解析手法と高音域における幾何音響解析手法を用いたハイブリッド音場解析手法の開発に関する研究を行った。ある周波数を境に波動音響理論と幾何音響理論の計算結果を補正し合成するという手法である。この研究では、最大で1 m³四方の立方体について、1000Hzをハイブリッドの境目周波数と設定して解析を行った。その結果、計算時間を大幅に短縮することができた。また、吉田[4]は坂吉の提案する手法で解析対象とする空間のスケールを実在するコンサートホールまで拡大してハイブリッド解析を行った。

1.3 研究目的

本研究では大規模空間の音場解析において幾何音響理論と波動音響理論を用いてより計算量を抑えながら全音域で正確な予測を得ることが出来るようにすることを目標としているが、本論文ではそこで用いられる幾何音響理論の改善を主に検討する。

1.4 論文構成

第 1 章では音響設計に必要な解析手法の説明をし、既往研究をもとに今回の研究目的について述べた。第 2 章では幾何音響理論と波動音響理論の 2 種類を詳しく説明した後、本研究での提案について述べる。第 3 章では今回研究するにあたって用意したモデル 4 種類の条件を述べ、計算結果を示す。第 4 章では本研究の考察を記し、第 5 章では本研究の結論を述べる。

第2章 研究手法

2.1 波動音響理論

波動音響理論では、音波の振る舞いを

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

で示される波動方程式、あるいは、それを導出するための運動方程式と連続方程式で記述する。これらの式を離散化し、数値的に解くことで、音場を解析することを波動音響数値解析と呼ぶ。波動方程式を解くため、音波の波動性を考慮した正確な予測ができるが、計算量が膨大であるため、予測できる対象や範囲が限られる。音響分野での波動音響数値解析では一般的に、境界要素法 (BEM 法)、時間領域有限差分法 (FDTD 法)、有限要素法 (FEM 法) が用いられる。幾何音響理論では、一般的に時間領域の解を得ることが可能なので、本論文ではそれらのうち同じ時間領域の解を得ることが可能な時間領域有限差分法を用いる。

2.1.1 時間領域有限差分法 (FDTD 法) [5][6]

FDTD 法とは、音場を空間的にも時間的にも離散化し、支配式の微分項を差分商で近似することにより解を得る手法である。空間的にも離散化された一つ一つのセルには Fig. 2.1 に示すように、音圧と粒子速度を互い違いに配置する。この空間的な配置のみを表した図を、Yee セルと呼ぶ。また、Fig. 2.2 に示すタガードグリッドと呼ばれる格子によって、時間的な配置と空間的な配置を表すことができる。FDTD 法では、時間的にも空間的にも互い違いに配置された音圧と粒子速度を、互い違いに計算するリーブフックアルゴリズムと呼ばれる手法を用いることで、音波の挙動を時間発展に求めることができる。

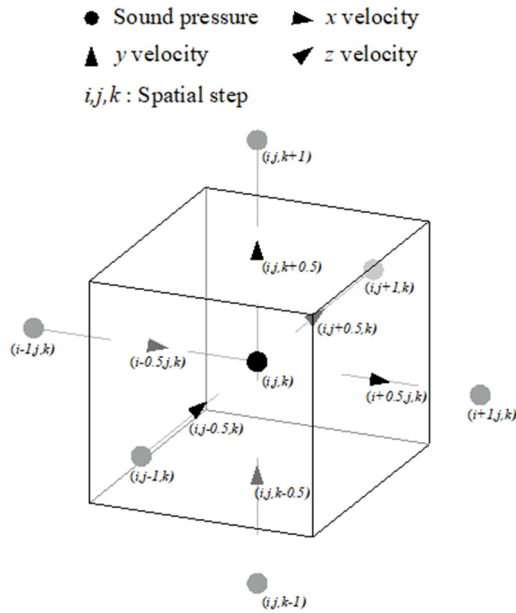


Fig. 2.1 Yee cell (three dimension)

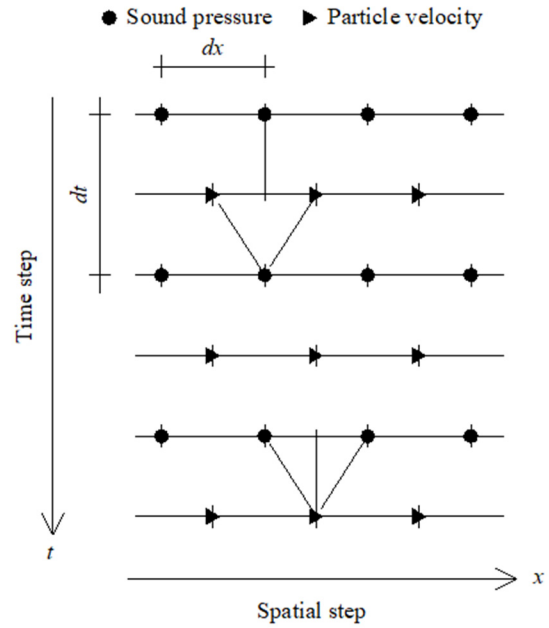


Fig. 2.2 Staggered grid (one dimension)

(1)理論式

ここに、寸法が $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ [m]で密度が ρ_0 [kg/m³]の空気粒子があり、各面に音圧 p [N/m²]が加わっている状態を考える。この空気粒子の x, y, z 方向の変位を u_x, u_y, u_z [m]とする。この時、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が微小量であることを考慮すれば、 x, y, z 方向の運動方程式は、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

となる。また、空気粒子の各面の変位を考え、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が微小量であることを考慮すれば、空気粒子の体積の増分 ΔV [m³]は、

$$\Delta V = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.5)$$

と表される。一方で、断熱変化を仮定すると、音圧と体積変化の関係は、理想気体の状態方程式から、体積弾性率を κ [N/m²]、変位前の体積を V [m³]とすると、

$$p = -\kappa \frac{\Delta V}{V} \quad (2.6)$$

と表される。また、体積弾性率と密度、音速 c [m/s]には次の式が成り立つ。

$$\kappa = \rho c^2 \quad (2.7)$$

ここで、式(2.5)を式(2.6)に代入すると、

$$\rho = -\kappa \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

という式ができる。この式を音圧に関する連続方程式という。

また、式(2.2),式(2.3),式(2.4),式(2.8)のすべての支配式を1階の偏微分方程式とするために、式(2.8)の両辺を時間微分するとともに変位の時間微分を粒子速度に置き換える。ここで x, y, z 方向の粒子速度をそれぞれ v_x, v_y, v_z [m/s]とすれば、式(2.2),式(2.3),式(2.4),式(2.8)はそれぞれ

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.12)$$

となる。

FDTD 法では、式(2.9)から式(2.12)を用いて音波の解析を行う。しかし、音圧や粒子速度は空間や時間に関して連続的に変化する。そのため計算機ではこれらをそのまま扱うことは不可能である。そこで、空間や時間を離散化することで連続な関数を近似し、計算を可能にする。FDTD 法における離散化は、Fig. 2.1 や Fig. 2.2 のように音圧と粒子速度を空間的にも時間的にもそれぞれ離散化幅の半ステップずつ互い違いに配置する。ここで、空間ステップを i, j, k 、時間ステップを n とし、このときの音圧の値を $p^n(i, j, k)$ [N/m²]、空間ステップが $i+0.5, j, k$ 、時間ステップが $n+0.5$ のときの x 方向の粒子速度を $v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k)$ [m/s]などと表記する。この離散化によって、

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (2.13)$$

のように中心差分近似と呼ばれる方法を用いて近似することができる。よって、式(2.9)～(2.12)は、

$$\rho_0 \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j, k) - v_x^{n-0.5}(i+0.5, j, k)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i+1, j, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (2.14)$$

$$\rho_0 \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5, k) - v_y^{n-0.5}(i, j+0.5, k)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i, j+1, k) - p^n(i, j, k)}{\Delta y} \quad (2.15)$$

$$\rho_0 \frac{v_z^{n+0.5}(i, j, k+0.5) - v_z^{n-0.5}(i, j, k+0.5)}{\Delta t} = -\frac{p^n(i, j, k+1) - p^n(i, j, k)}{\Delta z} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1}(i,j,k) - p^n(i,j,k)}{\Delta t} = & -\kappa \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5,j,k) - v_x^{n-0.5}(i-0.5,j,k)}{\Delta x} \\ & - \kappa \frac{v_y^{n+0.5}(i,j+0.5,k) - v_y^{n-0.5}(i,j-0.5,k)}{\Delta y} \\ & - \kappa \frac{v_z^{n+0.5}(i,j,k+0.5) - v_z^{n-0.5}(i,j,k-0.5)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

と近似することができる。次にこれらの式について、最も時間ステップが大きい項のみを左辺に残すように変形すると、

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5,j,k) = v_x^{n-0.5}(i+0.5,j,k) - \frac{\Delta t}{\rho_0 \Delta x} \{p^n(i+1,j,k) - p^n(i,j,k)\} \quad (2.18)$$

$$v_y^{n+0.5}(i,j+0.5,k) = v_y^{n-0.5}(i,j+0.5,k) - \frac{\Delta t}{\rho_0 \Delta y} \{p^n(i,j+1,k) - p^n(i,j,k)\} \quad (2.19)$$

$$v_z^{n+0.5}(i,j,k+0.5) = v_z^{n-0.5}(i,j,k+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho_0 \Delta z} \{p^n(i,j,k+1) - p^n(i,j,k)\} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1}(i,j,k) = & p^n(i,j,k) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5,j,k) - v_x^{n+0.5}(i-0.5,j,k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i,j+0.5,k) - v_y^{n+0.5}(i,j-0.5,k)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta z} \{v_z^{n+0.5}(i,j,k+0.5) - v_z^{n+0.5}(i,j,k-0.5)\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。式(2.18)~(2.20)により、任意の空間、及び、時間ステップの粒子速度は、同じ空間ステップの 1 時間ステップ前の粒子速度と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の音圧によって求めることができる。同様に、式(2.21)により、任意の空間、及び、時間ステップの音圧は、同じ空間ステップの 1 時間ステップ前の音圧と、隣接する空間ステップの半時間ステップ前の粒子速度によって求めることができる。Fig. 2.2 の破線に、音圧、または、粒子速度を求めるためには、どの空間ステップ及び時間ステップの粒子速度、または、音圧を参照する必要があるかを示しているので参照されたい。以上より、初期条件さえわかれば、式(2.18)~(2.20)と式(2.21)を全空間ステップについて交互に計算することで、音圧分布、及び、粒子速度分布を時間発展的に求めることができる。

(2)音源[7]

ここまでは、音源からの出力がない状態での支配式の計算方法について述べた。しかし実際には励振条件として音源を与えなければならない。音源を FDTD 法に導入する方法として、初期条件として粒子速度分布も音圧分布も 0 とみなせる場のある 1 点に時間波形を与える方法を用いている。音源位置を i_d, j_d, k_d 、体積速度信号を $Q(t)[\text{m}^3/\text{s}]$ とすると、式(2.21)の右辺に音源項を追加して、

$$\begin{aligned}
p^{n+1}(i_d, j_d, k_d) = & p^n(i_d, j_d, k_d) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i_d + 0.5, j_d, k_d)\} - v_x^{n+0.5}(i_d - 0.5, j_d, k_d) \\
& - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i_d, j_d + 0.5, k_d)\} - v_y^{n+0.5}(i_d, j_d - 0.5, k_d) \\
& - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta z} \{v_z^{n+0.5}(i_d, j_d, k_d + 0.5)\} - v_z^{n+0.5}(i_d, j_d, k_d - 0.5) \\
& + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x \Delta y \Delta z} Q^n
\end{aligned} \tag{2.22}$$

とすればよい。ここで、 $Q^n = Q((n - 0.5)\Delta t)$ である。本論文では、

$$Q(t) = M \exp[-A(t - t_0)^2] \tag{2.23}$$

で表されるガウシアンパルスを用いる。ここで M は体積速度のピーク値、 A は急峻さに関する係数、 t_0 はピーク時刻である。しかし、ガウシアンパルスを音源として与えると、受信点で音圧を観測しても、インパルス応答を得ることができない。そのため、インパルス応答を得るためには、逆フィルタをかける必要がある。

(3)PML (Perfectly matched layer : 完全吸音層)[8]

FDTD 法では空間を離散化して計算を行う。そのため、閉領域しか計算することができず、開領域を計算するためには、境界以降の領域を模擬するための無反射境界を導入する必要がある。FDTD 法に無反射境界を導入する一番簡単な方法は垂直入射インピーダンス境界で吸音率を1とすることである。しかし、斜めに入射する音波に対しては、吸音率が1でなくなるため、完全な無反射境界とはならない。現在、あらゆる方向からの入射に対して最も無反射境界を表現できる方法が Berenger[8]が提案した PML である。PML は、すべての軸方向について、隣接する媒質と特性インピーダンスが等しく、かつ、伝搬中に波が減衰するような非物理媒質で構成されている。Berenger が提案したのは電磁波用の PML であるが、弾性波用の PML も Chew ら[9]により定式化されている。PML を用いることで、自由空間などの開領域の計算が可能になるが、多くのメモリと計算時間が必要となる。

2.2 幾何音響理論

幾何音響理論は、音の波動性を無視して扱うもので、直接音と反射音の間の干渉や、回折などの波動現象は起こらず、光と同じように直進および幾何学的反射のみで音の伝搬を記述するものである。計算が容易である一方で、音の波動性を無視しているため低音域において誤差が生じる可能性が高い。この幾何音響理論の代表的な解析手法は音線法と虚像法である。この二つにはそれぞれデメリットがあり、それを補うために二つを組み合わせたバックトレース法と呼ばれるものが提案された。本論文では、このバックトレース法を採用する。以下ではまず音線法と虚像法を説明し、その後バックトレース法について説明する。

2.2.1 音線法[10]

音線法とは、音源から当立体角に多数の音線を放出して、反射・伝搬経路を追跡していく手法である。音線は最速経路を通るという Fermat の法則に則るため、温度及び密度が均一な物質中を進行する場合、音線は直進する。また、音線は壁面にぶつくと鏡面反射する。(Fig. 2.3)。

(1) 音線

建築音響で用いられる音線法の場合、無指向性の音源を与えることが多い。無指向性の音源を与えるには、音線数を決定した後、等立体角 [11] になるように単位エネルギーを持った音線を音源位置から放射する (Fig. 2.4)。無指向性の音源の場合、距離が離れていくにつれて音源の間隔が広がる。そのため、単位面積当たりに入射する音線の数が減る。この音線数の減少が音線法にける距離減衰の考え方である。

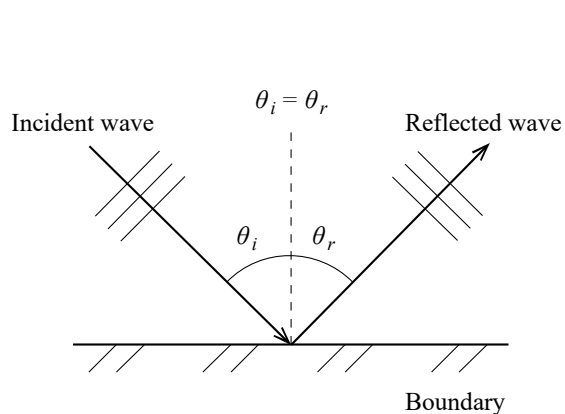


Fig. 2.3 Specular reflection

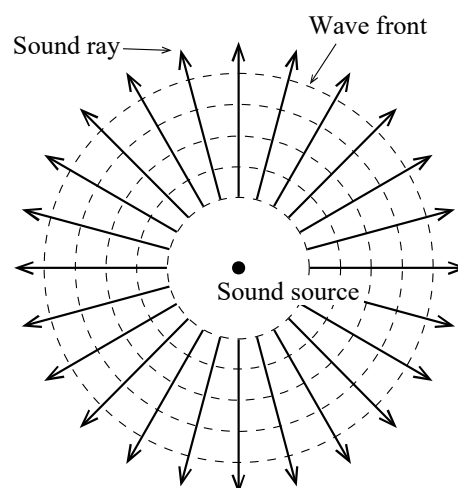


Fig. 2.4 Omni-directional sound source

(2) 境界面の扱い

境界面に入射した音波のエネルギー E_i は反射するエネルギー E_r 、境界内部で欠損するエネルギー E_l 、透過するエネルギー E_t に分けられる (Fig. 2.5)。このとき、エネルギー保存則より、

$$E_i = E_r + E_l + E_t \quad (2.24)$$

が成り立つ。このとき、入射するエネルギーと反射するエネルギーの比を反射率 r といい、

$$r = \frac{E_r}{E_i} \quad (2.25)$$

と表される。また、このとき吸音率 α は、

$$\alpha = 1 - \frac{E_r}{E_i} \quad (2.26)$$

と表される (Fig. 2.6)。音線法において、音線が境界面にぶつかったとき、反射する音線エネルギーは、境界面の吸音率を α とすると、反射率は $1 - \alpha$ となる。このとき、

$$E_r = E_i(1 - \alpha) \quad (2.27)$$

となり、斜入射を考慮する場合、入射角度を θ とすると、吸音率は $\alpha \times \cos\theta$ となり、反射する音線エネルギーは、

$$E_r = E_i(1 - \alpha \cos\theta) \quad (2.28)$$

と坂吉の研究ではされていた (Fig. 2.7)。しかし、この式に根拠がなかったため、本論文では再度検討を行う。

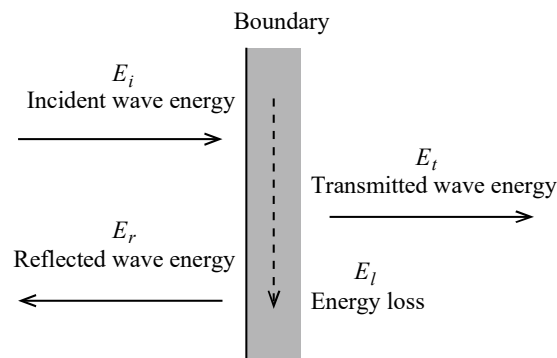


Fig. 2.5 Sound wave energy on boundary

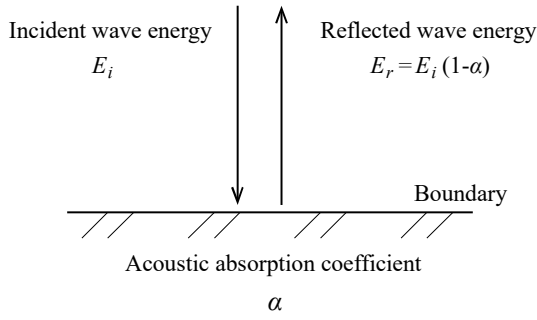


Fig. 2.6 Treatment of sound wave energy on boundary

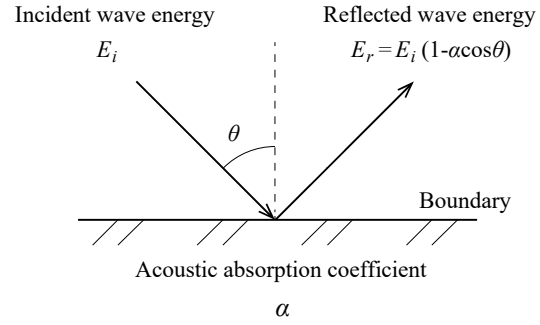


Fig. 2.7 Oblique incidence

(3) 境界面の扱いの改善

入射する音圧を p_i [N/m²]、反射する音圧を p_r [N/m²]、比音響インピーダンス Z'_n 、垂直入射吸音率 α 、垂直入射比音響インピーダンス比 Z_n [N · s/m³]、また反射率を R とする。比音響インピーダンス Z'_n と垂直入射比音響インピーダンス比 Z_n は

$$Z'_n = \frac{p}{v} \quad (2.29)$$

$$Z_n = \frac{Z'_n}{\rho_0 c_0} \quad (2.30)$$

音圧 p_i と p_r はそれぞれ

$$p_i(x, y) = e^{ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.31)$$

$$p_r(x, y) = R e^{-ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.32)$$

となる。また、 x 方向と y 方向の入射粒子速度 $v_{ix,y}$ [m/s] と反射粒子速度 $v_{rx,y}$ [m/s] はそれぞれ

$$v_{ix} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{ik_0 \cos \theta}{i\omega\rho_0} e^{ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.33)$$

$$v_{iy} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{ik_0 \sin \theta}{i\omega\rho_0} e^{ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.34)$$

$$v_{rx} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_r}{\partial x} = -\frac{ik_0 \cos \theta}{i\omega\rho_0} R e^{-ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.35)$$

$$v_{ry} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_r}{\partial y} = \frac{ik_0 \sin \theta}{i\omega\rho_0} R e^{-ik_0 x \cos \theta} \times e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.36)$$

となる。 $x = 0$ のとき音圧 p [N/m²] と粒子速度 v_x [m/s] は

$$p = p_i + p_r = e^{ik_0 y \sin \theta} + R e^{ik_0 y \sin \theta} = (1 + R) e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.37)$$

$$v_x = v_{ix} + v_{rx} = \frac{ik_0 \cos \theta}{i\omega \rho_0} e^{ik_0 y \sin \theta} - \frac{ik_0 \cos \theta}{i\omega \rho_0} R e^{ik_0 y \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\rho_0 c_0} (1 - R) e^{ik_0 y \sin \theta} \quad (2.38)$$

となり、反射率 R は式(2.29),(2.30),(2.37),(2.38)より

$$\begin{aligned} \frac{p}{v_x} &= \frac{\rho_0 c_0}{\cos \theta} \frac{1 + R}{1 - R} = \rho_0 c_0 Z_n \\ 1 + R &= (1 - R) Z_n \cos \theta \\ (1 + Z_n \cos \theta) R &= Z_n \cos \theta - 1 \\ R &= \frac{Z_n \cos \theta - 1}{Z_n \cos \theta + 1} \end{aligned} \quad (2.39)$$

と導かれる。

さて、 $\theta = 0$ のとき式(2.31)~(2.34)は

$$p_i = e^{ik_0 x} \quad (2.40)$$

$$p_r = R e^{-ik_0 x} \quad (2.41)$$

$$v_i = \frac{ik_0}{i\omega \rho_0} e^{ik_0 x} \quad (2.42)$$

$$v_r = -\frac{ik_0}{i\omega \rho_0} R e^{-ik_0 x} \quad (2.43)$$

となる。また、 $x = 0$ のとき

$$\frac{p}{v} = \frac{p_i + p_r}{v_i + v_r} = \frac{1 + R}{\rho_0 c_0 (1 - R)} = Z_n$$

これを整理して、

$$R = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} \quad (2.44)$$

単位時間単位面積当たりの音のエネルギーである音響インテンシティ I_i, I_r は

$$I_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_i \cdot v_i^*\} \quad (2.45)$$

$$I_r = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_r \cdot (-v_r)^*\} \quad (2.46)$$

となるので、

$$I_i = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{e^{ik_0 x} \cdot \frac{e^{-ik_0 x}}{\rho_0 c_0}\right\} = \frac{1}{2\rho_0 c_0} \quad (2.47)$$

$$I_r = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{R e^{-ik_0 x} \cdot \frac{R^*}{\rho_0 c_0} e^{ik_0 x}\right\} = \frac{|R|^2}{2\rho_0 c_0} \quad (2.48)$$

垂直入射吸音率 α は

$$\alpha = 1 - \frac{I_r}{I_i} = 1 - |R|^2 = 1 - \left| \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} \right|^2 \quad (2.49)$$

これを变形して

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} \right|^2 &= 1 - \alpha \\ Z_n &= \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{1 - \sqrt{1 - \alpha}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。式(2.39)(2.50)から反射率Rは

$$R = \frac{Z_n \cos \theta - 1}{Z_n \cos \theta + 1} = \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \cos \theta - (1 - \sqrt{1 - \alpha})}{(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \cos \theta + (1 - \sqrt{1 - \alpha})} \quad (2.51)$$

となる。

また、2.1.1の(2)でおいた E_i, E_r をx方向とy方向でそれぞれ $E_{ix}, E_{iy}, E_{rx}, E_{ry}$ にわけると

$$E_{ix} = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_i \cdot v_{ix}^*\} = \frac{\cos \theta}{2\rho_0 c_0} \quad (2.52)$$

$$E_{iy} = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_i \cdot v_{iy}^*\} = \frac{\sin \theta}{2\rho_0 c_0} \quad (2.53)$$

$$E_{rx} = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_r \cdot (-v_{rx})^*\} = \frac{|R|^2 \cos \theta}{2\rho_0 c_0} \quad (2.54)$$

$$E_{ry} = \frac{1}{2} \text{Re}\{p_r \cdot v_{ry}^*\} = \frac{|R|^2 \sin \theta}{2\rho_0 c_0} \quad (2.55)$$

となる。これらより、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{E_{rx}^2 + E_{ry}^2}}{\sqrt{E_{ix}^2 + E_{iy}^2}} = \frac{\frac{|R|^2}{2\rho_0 c_0}}{\frac{1}{2\rho_0 c_0}} = |R|^2 \quad (2.56)$$

式(2.51)(2.56)から音線の反射エネルギーは

$$E_r = E_i \left| \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \cos \theta - (1 - \sqrt{1 - \alpha})}{(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \cos \theta + (1 - \sqrt{1 - \alpha})} \right|^2 \quad (2.57)$$

となるため、本論文では音線エネルギーを式(2.28)から式(2.57)に変更する。

(4) 判定

音線経路を追跡するために、音線がどの壁面でぶつかるかを判定する必要がある。そのためにまず始めに壁面の法線ベクトルを求める。ここでは、閉空間であれば、法線ベクトルが内向きになるように設定する。法線ベクトルの向きは、頂点の順番と Fig. 2.8 のように対応させる。次に、法線ベクトルと音線の内積を求める。求めた内積が負の場合、音線はその壁面に向かっていると判定できる (Fig. 2.9)。壁面に向かっていることが判定できたら次に、音線と壁面の交点が壁面内にあるかどうかを判定する。壁面の頂点と交点の座標を Fig. 2.10 に示す。頂点と交点の座標の間には

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= x_n \\ ay_1 + by_2 + cy_3 &= y_n \\ az_1 + bz_2 + cz_3 &= z_n \end{aligned} \tag{2.58}$$

の関係が成り立つ。このとき $0 \leq a, b, c \leq 1$ かつ $a + b + c = 1$ のとき、壁面内に交点があると判定することができる。しかし、室形状によっては Fig. 2.11 に示すように、交点が二つ現れる可能性がある。その場合、近いほうの交点を真の交点と判定する。

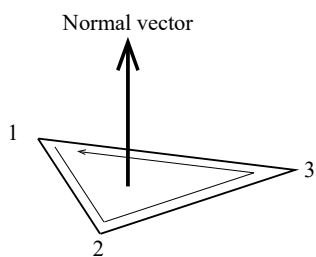


Fig. 2.8 Normal vector

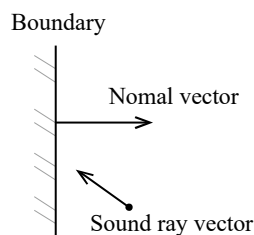


Fig. 2.9 Judgment of ray vector which heads for wall

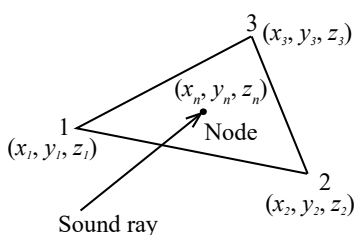


Fig. 2.10 Judgment of node in wall

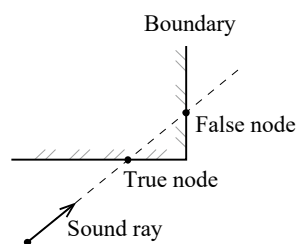


Fig. 2.11 Judgment of true node

(5) 受信判定

音線が壁面から壁面に向かっていく間に受信点を通過しているかを判定する。判定方法は、受信点と音線の最短距離を求め、その距離が設定した受信半径以内であれば受信したと判定する。受信したと判定した場合には、受信した時の時刻とエネルギーを記録する。

(6) 計算手順

Fig. 2.12 に音線法のフローチャートを示す（プログラムの表記は Fortran に準ずる）。まず、室形状や基本情報を入力し、壁面の法線ベクトルを算出し、音源を作成する。次に、音線を追跡しながら、受音判定を行う。最後に、同時刻に受音した音線のエネルギーを足し合わせて結果を出力する。

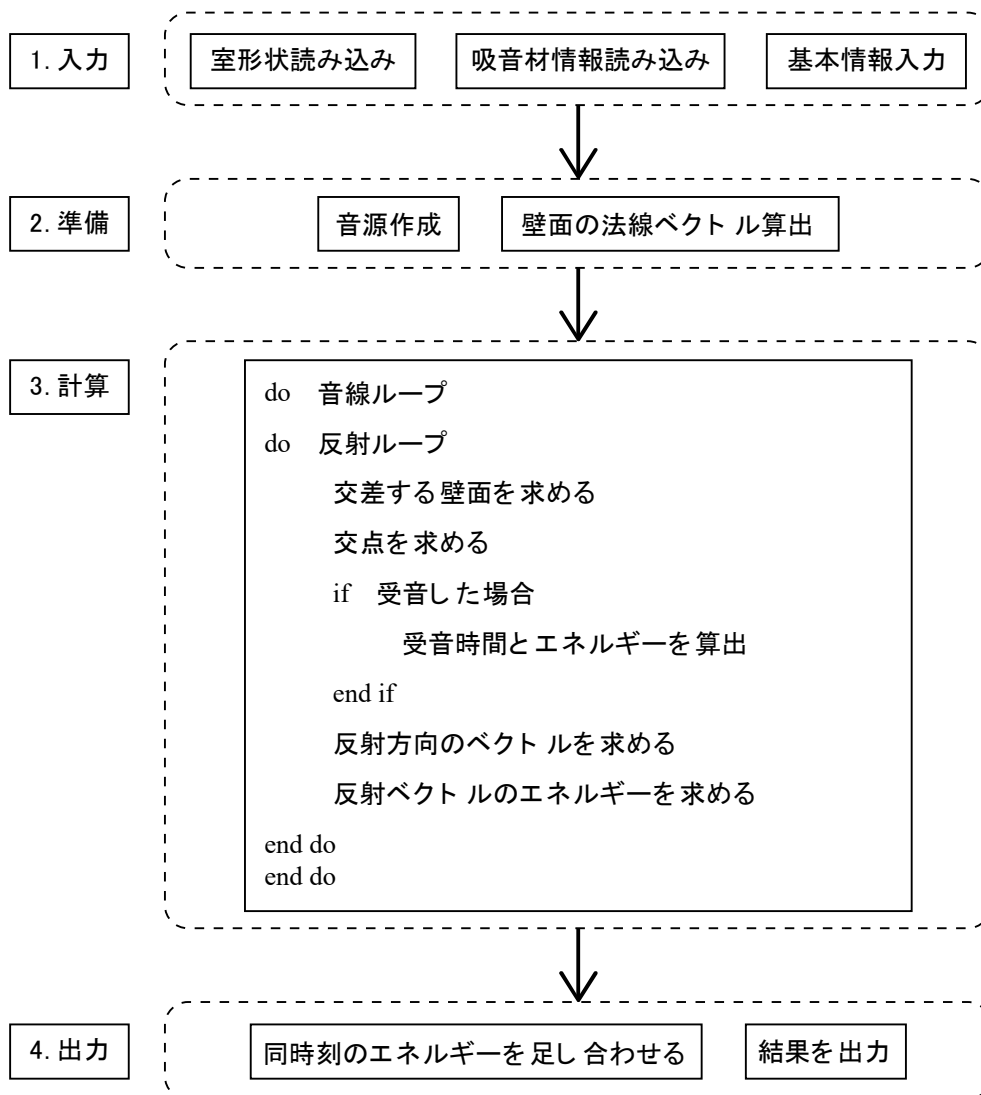


Fig. 2.12 Flow chart of ray tracing

(7) 特徴

音線法は計算や可視化が容易であるという利点がある。一方、音線数や受音半径の設定によって様々な誤差が生じてしまう。Fig. 2.13 は音線数が少ない、または、受音半径が小さいために受音されるべき経路が受音されたと判定されない場合を示したものである。また、Fig. 2.14 は受音半径が大きすぎるために、受音しないはずの経路が受音したと判定される場合を示したものである。

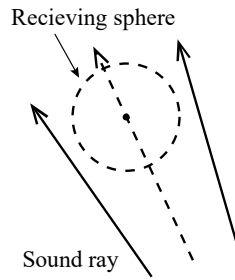


Fig. 2.13 Fault of ray tracing

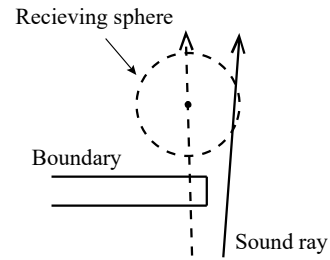


Fig. 2.14 Fault of ray tracing

2.2.2 虚像法[12]

虚像法とは、壁面に対する音源の虚像（虚音源）を作成し、その虚音源群、および、実音源からのそれぞれの寄与を各反射音、および、直接音の強さとし、それらの総和を算出することで、ある点の音の強さを求める手法である。虚像法では音線法と同様に、音は直進し、鏡面反射すると仮定する。しかし、距離減衰の考え方は音線法と異なり、虚音源ごとに考慮する必要がある。

(1) 音源

虚像法では、実音源と虚音源に単位エネルギーを与える。音線法では、音源から無数の音線を放射していたが、虚像法では、各音源と受音点を結び、各音源から受音点までの経路を考える。その経路が実際に到達可能な経路かどうかを判定し、その経路が到達可能な経路であれば、虚音源ごとの距離減衰と反射壁面による吸音を計算し、受音点でのエネルギーと到達時間を算出する。

また、室内の総壁面数 m 、最大反射次数 k とすると、虚音源の総数 N は

$$N = \sum_{i=1}^k m(m-1)^{i-1} \quad (2.59)$$

と表すことができる。

(2) 境界面の扱い

境界面の扱いは音線法と同様であるため、2.2.1 項の (2) を参照されたい。

(3) 判定

作成された虚音源が有効なものかどうか、すなわち、受音点まで到達可能な経路を持つかどうかを判定する必要がある。矩形の室であれば、経路としては全虚音源が有効となる。しかし、遠くにある虚音源は距離減衰や壁面による吸音によって、受音点に到達する頃には、ほぼ0となり、実質的には無効な虚音源となる場合がある。

一方、不整形な室の場合、経路として成立する虚音源を判定するには複雑なプロセスが必要である。本論文では詳細は割愛するので、Borish[12]の文献などを参照されたい。

(4) 計算手順

Fig. 2.15 に虚像法のフローチャートを示す（プログラムの表記は Fortran に準ずる）。坂吉の研究では、まず、壁面に対する虚音源を式(2.59)に基づく個数だけ作成し、有効な経路の虚音源を判定する。次に、有効な経路の虚音源のみ、音源と虚音源を結び、それぞれの距離減衰と壁面による吸音を算出し、受音点におけるエネルギーと到達時刻を算出する。最後に、同時刻のエネルギーを足し合わせて結果を算出した。しかし、完全に同時刻でないパルスでもサンプリングの際の単位微小時間内に収まっているものは同一時刻

とみなすことになり、実際の時刻からわずかではあるが時間的なずれが生じる。また、単位微小時間内に複数のエネルギーが存在する場合にはそれらを足し合わせていたが、音圧のインパルス応答を算出するにあたり、その処理の根拠は不明である。以上を踏まえ、本論文で再検討を行う。

(5) 計算手順の改善

まず、音源から受音点までの距離と到達エネルギーを算出する。次に、坂吉の研究では時間領域で足し合わせて結果を算出したが、本研究では周波数領域での足し合わせをする。すなわち、速度ポテンシャル ϕ 、波数 k 、虚音源の総数 N , n 番目の虚音源からの到達エネルギー E_n ($0 \leq E \leq 1$)、 n 番目の虚音源から受音点までの距離 r_n [m]とすると、

$$\phi = \sum_{n=1}^N \sqrt{E_n} \frac{e^{ikr_n}}{4\pi r_n} \quad (2.60)$$

となる。ここで、波数 k は角周波数 ω 、音速 c_0 、周波数 f より次式が成り立つ。

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0} \quad (2.61)$$

式(2.60)(2.61)よりそれぞれの周波数ごとに速度ポテンシャル ϕ を計算し、フーリエ逆変換より時間領域に戻し、結果を算出する。

(6) 特徴

虚像法では、方向、相対的なインテンシティ、及び、到達時間が音線法より正確に求めることができる。したがって、初期反射音構造の検討やエコー障害のチェック、反射音の指向性の検討に有効である。しかし、式(2.59)に示した数の虚音源を作成しなければいけないため、総壁面数や最大反射次数が多い場合には、一般的にその多くは有効でない虚音源であることが多く、計算効率が悪いという欠点がある。

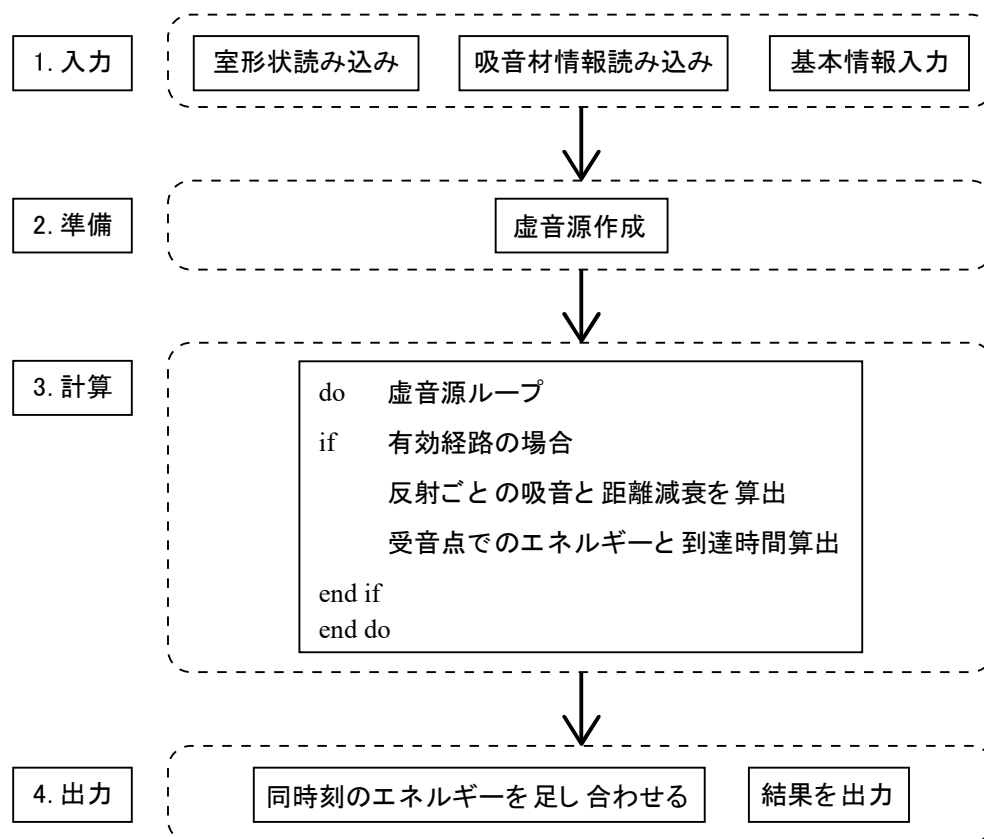


Fig.2.15 Flow chart of image source

2.2.3 バックトレース法[13]

バックトレース法とは、音線法と虚像法を組み合わせ、音線法の誤差を減らし、かつ、虚像法の計算効率の悪さを補う手法である。

(1) 判定

バックトレース法における有効虚音源の判定は、虚像法における有効虚音源の判定ほど複雑なものではない。音線法によって導き出された反射経路どおりに、虚音源がその反射経路をたどれるかどうかで判定を行う。Fig. 2.16 は音線法によって1→4という反射経路を通して受音しており、それに基づいて虚音源を作成し、虚音源と受音点を結ぶと、同じように1→4と反射しているため、有効虚音源と判断できることを示している。Fig. 2.17 は音線法によって1→8という反射経路を通して受音しており、それに基づいて虚音源を作成し、虚音源と受音点を結ぶと、1→8と反射した後に5にぶつかっており、音線法によって導かれた反射経路とは異なる反射経路を通っているため、無効虚音源と判定されることを示している。

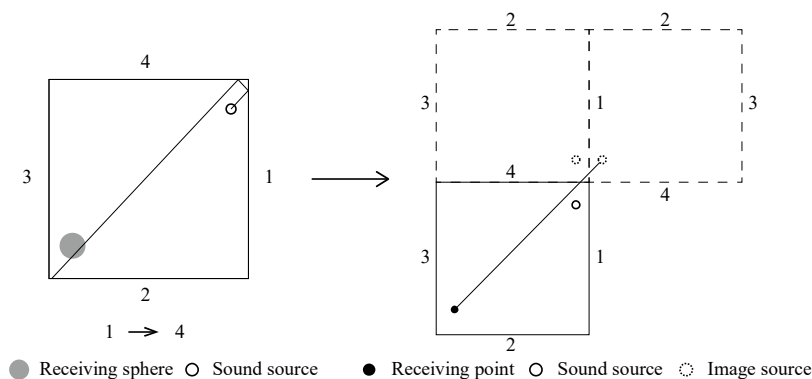


Fig. 2.16 Valid image source

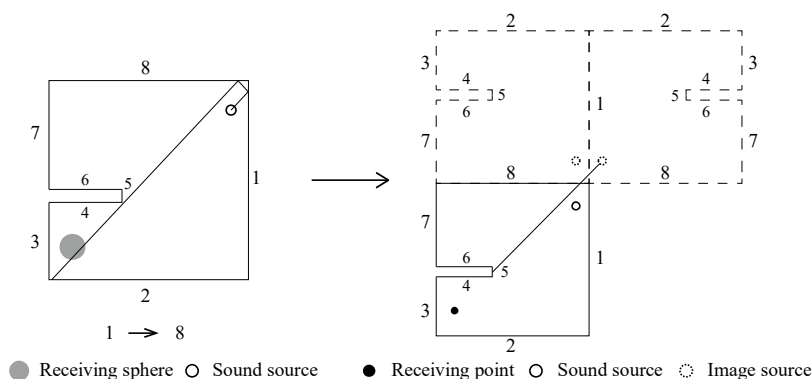


Fig. 2.17 Invalid image source

(2) 計算手順

Fig. 2.18 にバックトレース法のフローチャートを示す(プログラムの表記は Fortran に準ずる)。まず、音線法によって反射経路のみを抽出し、その反射経路に基づいて虚音源

を作成する。その虚音源が有効か無効か判定した後、有効虚音源のみを対象に虚像法により計算を行う。

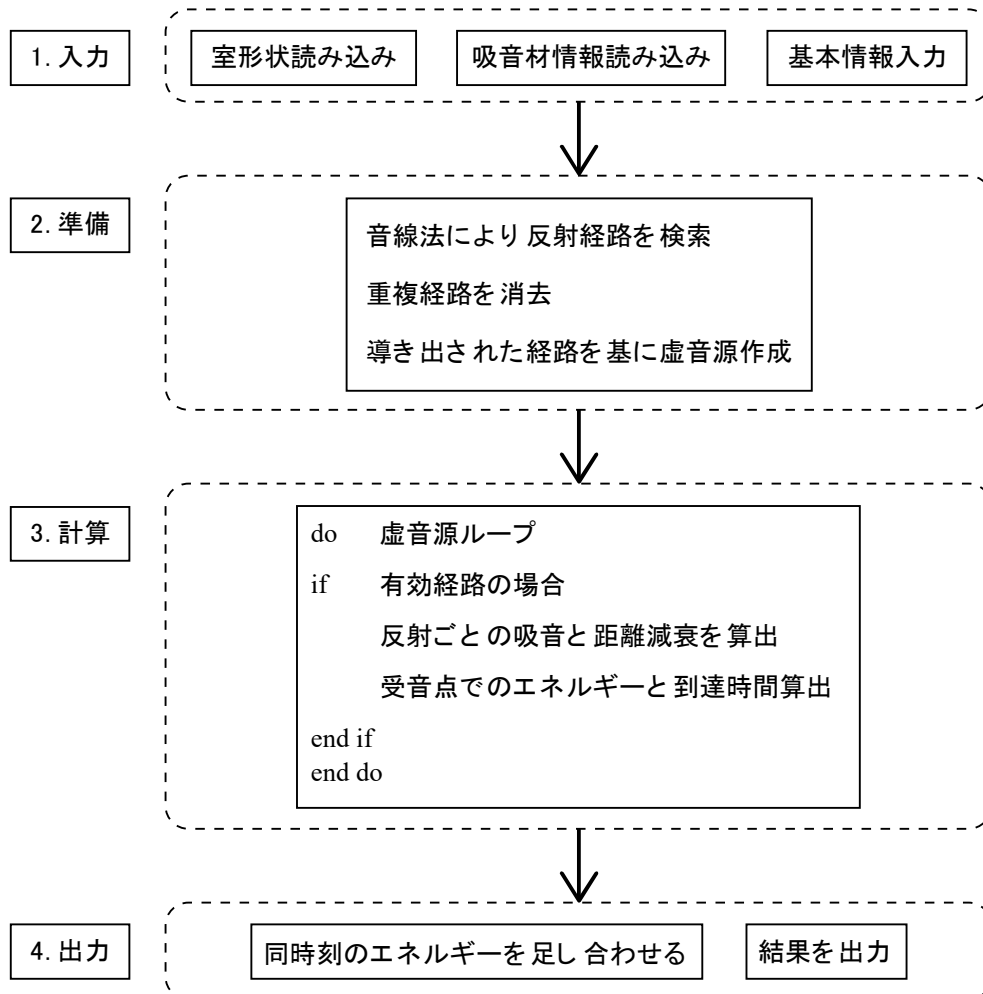


Fig. 2.18 Flow chart of backtracing method

(3) 精度

Vorlander[13]は、この手法を用いて計算することにより、音線法による受信領域を比較的大きく取り、かつ、音線法を減らしても計算精度を保持することを示し、計算時間の大幅な短縮が可能になったことを報告している。

第3章 計算結果

小さくて単純な形の空間を想定して、幾何音響理論と波動音響理論を用いてより正確な予測を得る解析の実現を検討する。本論文では、そのモデルとして4つのパターンを考える。この4つのうち、モデル1～3は開領域が対象となっており、壁面は無限大平面となる。そのため FDTD 法の計算では PML を設置することによってそれらを表現する。また、モデル4は閉空間とする。モデルの詳しい形状などは次節以降で述べる。それ以外の共通の条件を Table3.1~3.2 に示す。

Table3.1 Calculation condition of FDTD method

空間離散化幅	0.02m
解析対象周波数	15.625~1,000Hz
音源	ガウシアンパルス
ガウシアンパルス最大値	1.0 m ² /s
ガウシアンパルス係数	1.0×10 ⁷
ガウシアンパルス中心時間	1.0×10 ⁻³ s
PML 層数	32 層
PML テーパー乗数	4.0
PML 減衰係数最大値	-120 dB

Table3.2 Calculation condition of backtracing method

音速	343.5m/s
時間離散化幅	15.625~1,000Hz
壁面の垂直入射吸音率	0.1833
音線数	1,000,000 本
受信半径	0.05m
最大反射回数	100 回

3.1 モデル 1

3.1.1 条件

Fig. 3.1 にモデル 1 の形状を示す。モデル 1 では、受信点付近に壁面を 1 枚配置する。

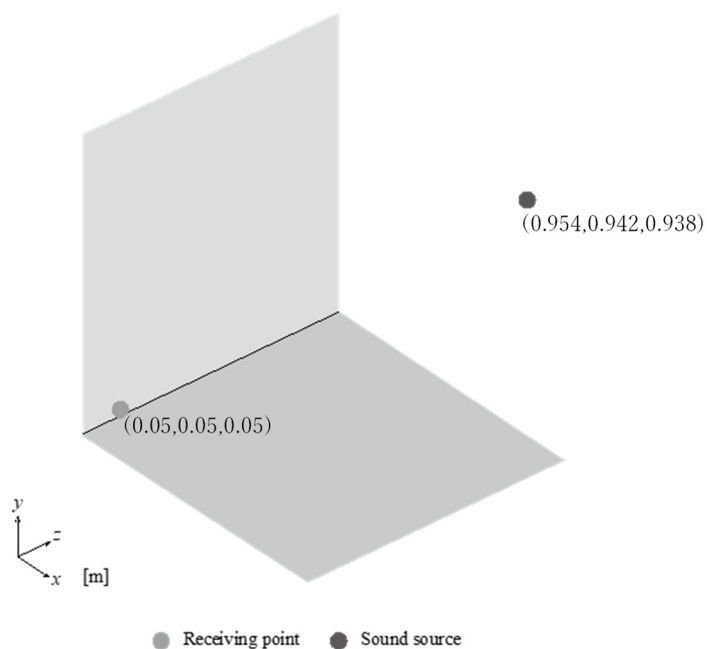


Fig. 3.1 Shape of model1

3.1.2 結果

Fig. 3.2 にモデル 1 の周波数応答の改善後のグラフ、Fig. 3.3 に坂吉の研究結果のグラフを示す。モデル 1 では壁面 1 枚の近くに受信点があるため、直接音到達後すぐに反射音一つ現れる。Fig. 3.2 と Fig. 3.3 を比較すると、Fig. 3.2 ではほぼ一致した周波数特性が得られている。

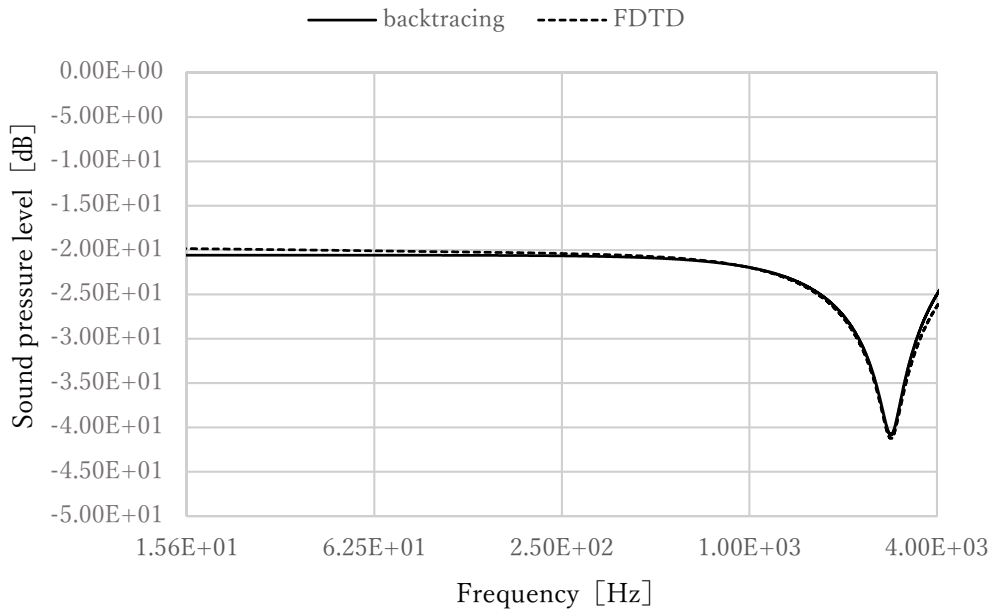


Fig. 3.2 Comparison of frequency response of model1

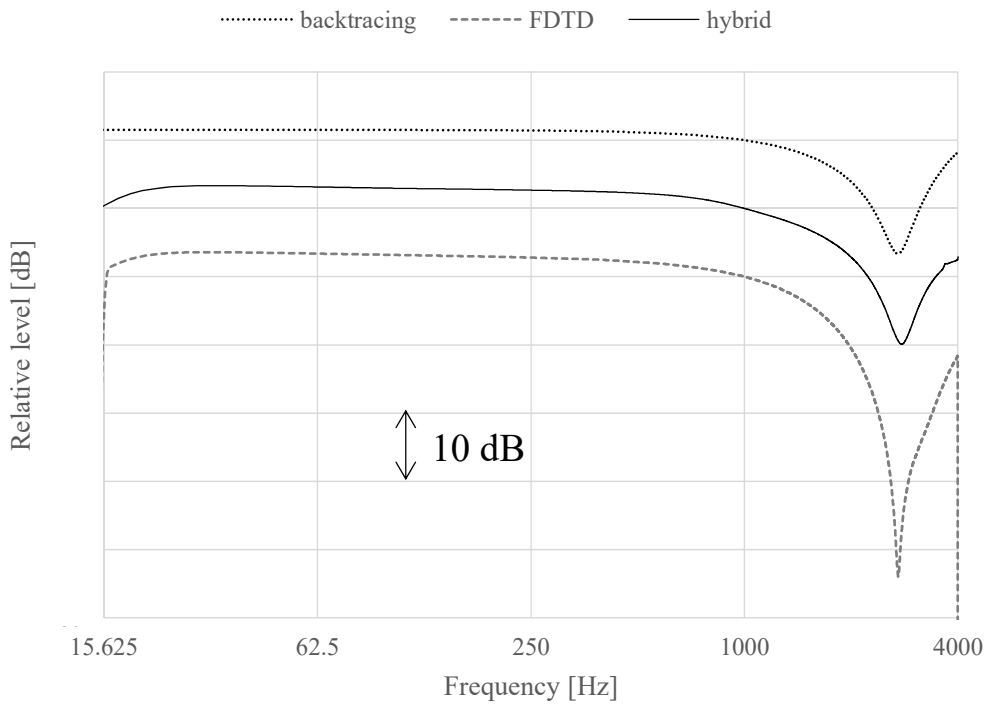


Fig. 3.3 Comparison of frequency response of model1

3.2 モデル 2

3.2.1 条件

Fig. 3.4 にモデル 2 の形状を示す。モデル 2 では、平行になるように 1 m 離して壁面を 2 枚配置する。

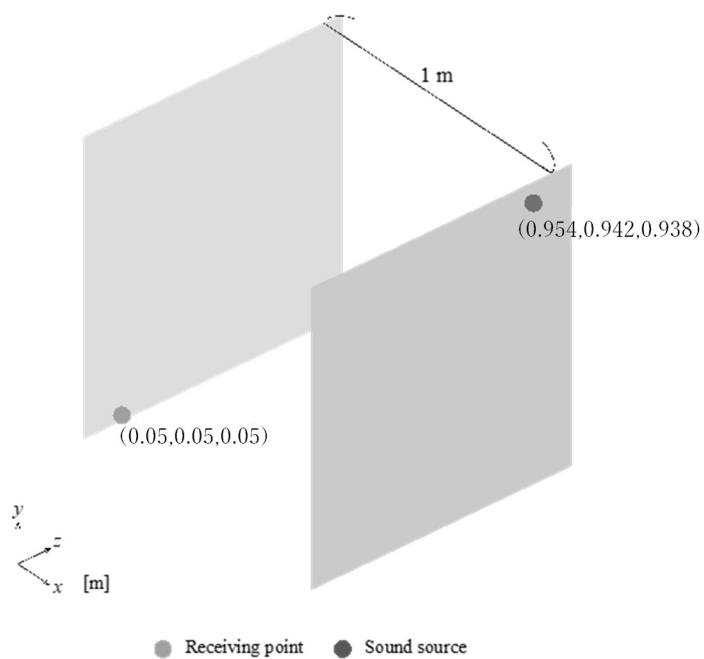


Fig. 3.4 Shape of model2

3.2.2 結果

Fig. 3.5 にモデル 2 の周波数応答の改善後のグラフ、Fig. 3.6 に坂吉の研究結果のグラフを示す。Fig. 3.5 と Fig. 3.6 を比較すると、Fig. 3.6 ではほぼ一致した周波数特性が得られている。

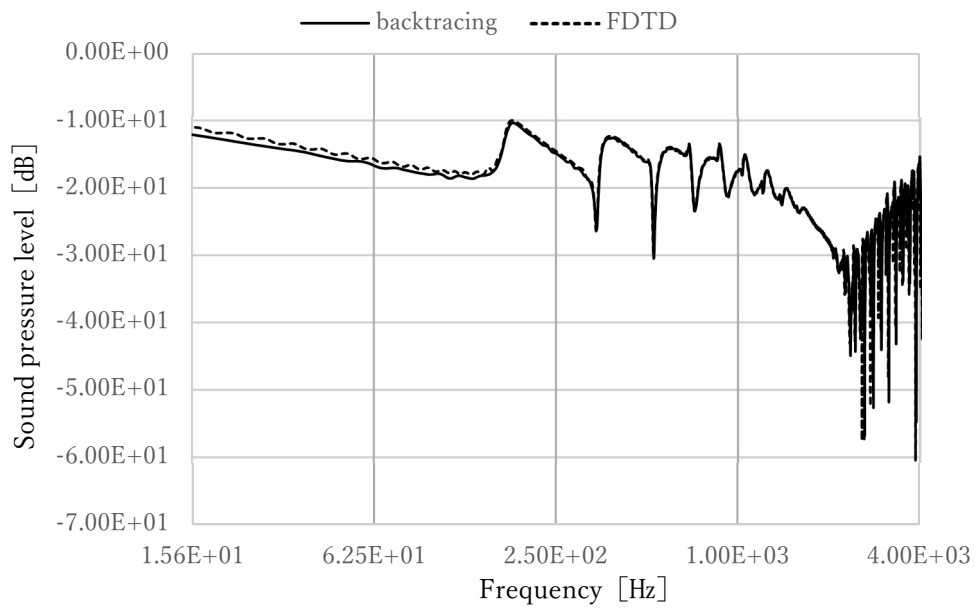


Fig. 3.5 Comparison of frequency response of model2

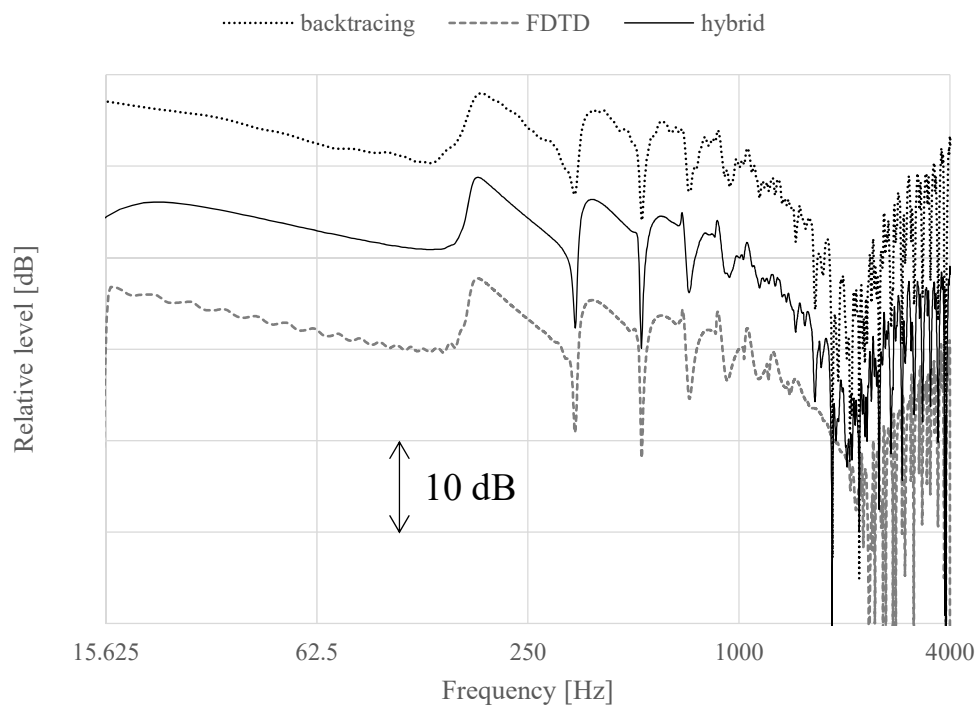


Fig. 3.6 Comparison of frequency response of model2

3.3 モデル 3

3.3.1 条件

Fig. 3.7 にモデル 3 の形状を示す。モデル 3 では、垂直になるように受信点付近に壁面を 2 枚配置する。

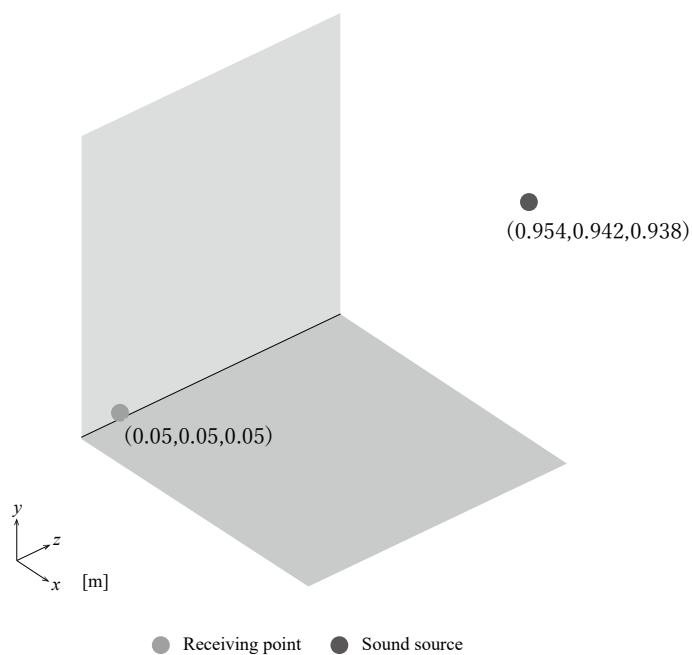


Fig. 3.7 Shape of model3

3.3.2 結果

Fig. 3.8 にモデル 3 の周波数応答の改善後のグラフ、Fig. 3.9 に坂吉の研究結果のグラフを示す。Fig. 3.8 と Fig. 3.9 を比較すると、Fig. 3.8 ではほぼ一致した周波数特性が得られている。

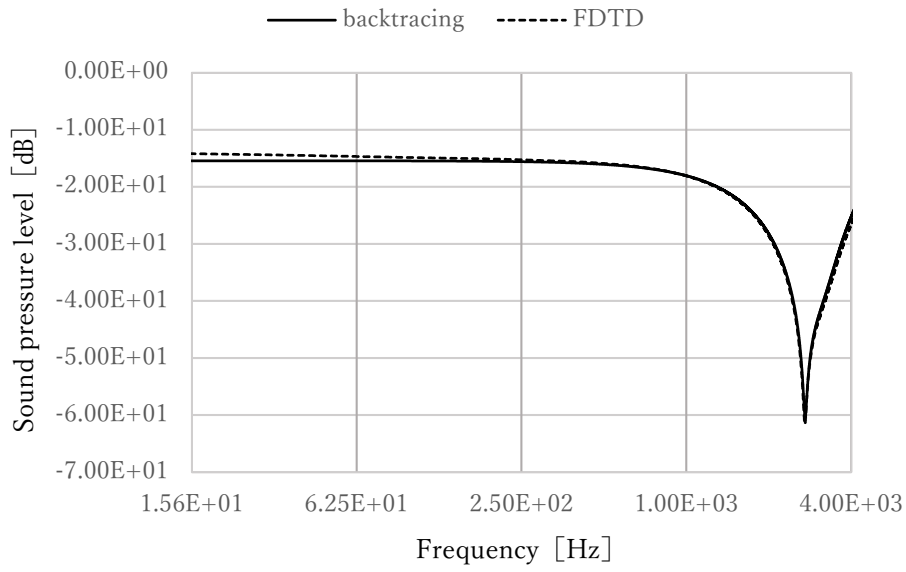


Fig. 3.8 Comparison of frequency response of model3

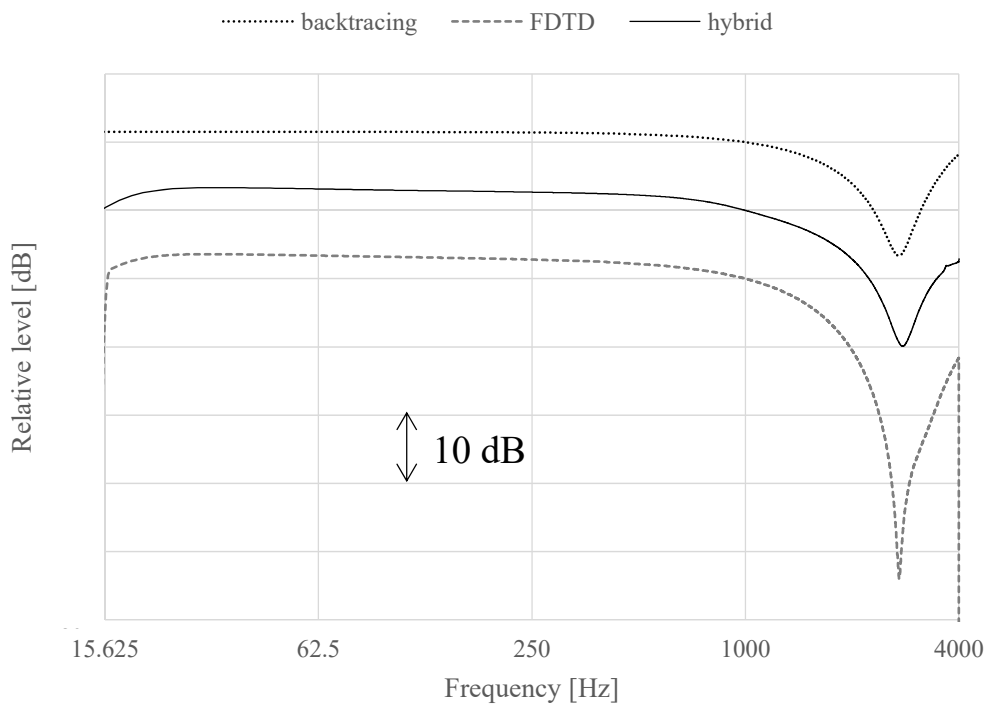


Fig. 3.9 Comparison of frequency response of model3

3.4 モデル4

3.4.1 条件

Fig. 3.10 にモデル4も形状を示す。モデル4は1 m四方の立方体である。また、モデル1～3と違って閉空間を対象としている。

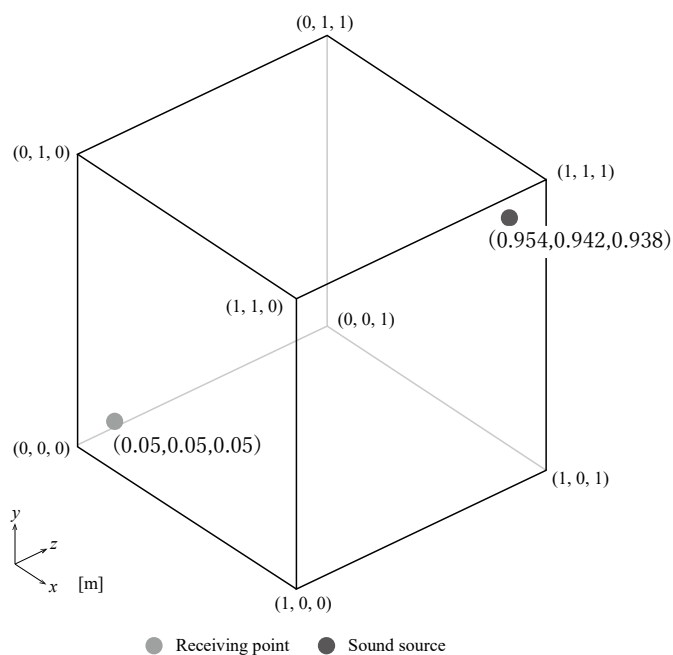


Fig. 3.10 Shape of model4

3.4.2 結果

Fig. 3.11 にモデル4の周波数応答の改善後のグラフ、Fig. 3.12 に坂吉の研究結果のグラフを示す。Fig. 3.11 と Fig. 3.12 を比較すると、Fig. 3.11 ではほぼ一致した周波数特性が得られている。

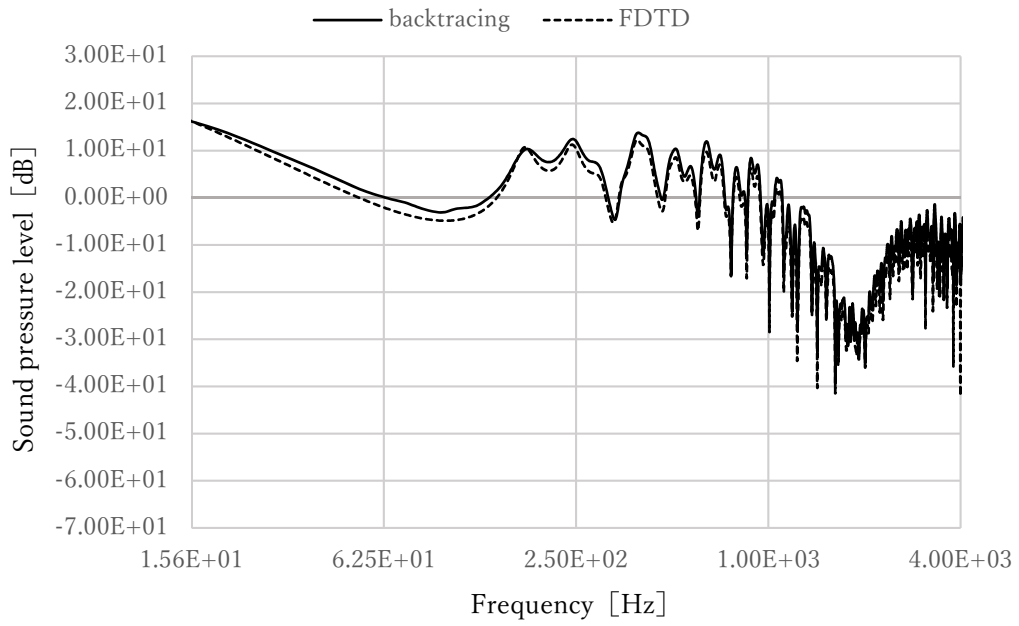


Fig. 3.11 Comparison of frequency response of model4

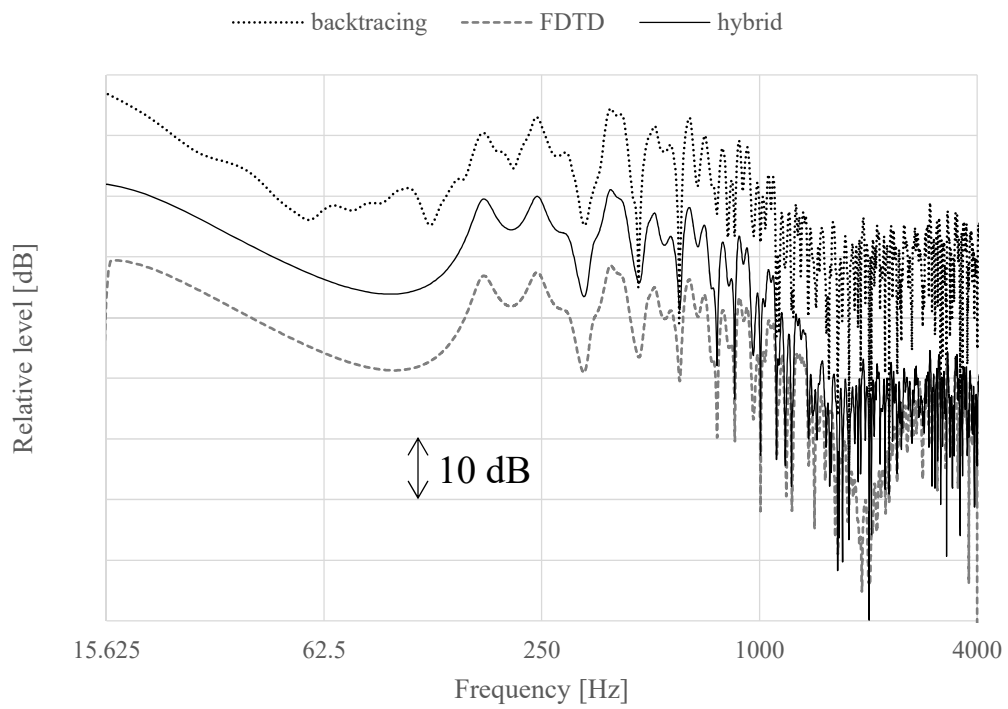


Fig. 3.12 Comparison of frequency response of model4

第4章 考察

モデル1と3は坂吉の研究で既にバックトレースとFDTD法の真値が一致していたが、以前の結果以上に一致する結果を得ることができた。一方、モデル2と4は坂吉の研究ではかなりの誤差が生じていた。これは斜入射を考慮する場合、反射する音線のエネルギーを求める式が正しくなかったと考えられる。そのため、この式を物理学的に考え直しグラフを作成した。するとモデル2と4でもバックトレースとFDTDの真値が一致する結果を得ることができた。これより変更後の式が正しかったと考えられる。

第5章 結論

本研究では、幾何音響理論の予測精度を高めることを目的とした。結論として、モデル1から4、全てのモデルにおいてバックトレースとFDTDの真値を一致する結果を得ることができた。この結果を用いてハイブリット解析を行うと音響設計において大幅な時間短縮を実現することができるものと思われる。

参考文献

- [1] E.Granier,et.al.: “ Experimental acoustics of car audio installations ” J.Audio Eng.Soc.,44,835-849,1996.
- [2] 文屋信太郎,吉村忍:“開領域伝搬音過渡解析のための幾何音響・波動音響結合解法”,日本音響学会誌,58(12),737-744,2002.
- [3] 坂吉佑太:“幾何音響理論と波動音響理論を用いた大規模空間のハイブリッド音場解析に関する研究”,関西大学卒業論文,2016.
- [4] 吉田菜摘:“波動音響理論と幾何音響理論を用いたハイブリッド音場解析法の大規模空間への適用”,関西大学卒業論文,2017
- [5] 日本建築学会編:“音環境の数値シミュレーション-波動音響解析の技術と応用-”,丸善,東京,2011.
- [6] 豊田政弘:“FDTD 法で視る音の世界”,コロナ社,東京,2015
- [7] 鶴秀生,岩津玲磨:“差分方によるインパルス応答の効率的計算手法”,日本音響学会春季研究発表会講演論文集,1055-1058,2009
- [8] J.-P. Berenger:“A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, J. Comput. Phys.,114(2),185-200,1994.
- [9] W. C. Chew and Q. H. Liu:“Perfectly matched layer for elastodynamics: a new absorbing boundary condition”. J. Comput. Acoust., 4(4),341-359,1996.
- [10] 日本建築学会編:“はじめての音響数値シミュレーションプログラミングガイド”,コロナ社,東京,2012
- [11] 鈴木広隆,平手小太郎,安岡正人:“軸対称等立体角 26 面体を用いた全方位の離散化-方向別に定義された物理量の可視化のための一提案-”,図学研究,36(1),3-9,2002.
- [12] J.Borish:“Extension of the image model to arbitrary polyhedral”,J.Acoust.Soc.Am.,75(6),1827-1836,1984.
- [13]Michael Vorlander:“Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing/image-source algorithm”,J.Acoust.Soc.Am.,86(1),172-178,1989.