

FDTD 法を用いた乱入射吸音率の予測

関西大学 環境都市工学部 建築学科

建築環境第一研究室

松本涼汰

指導教員 豊田政弘 准教授

目次

| | | |
|-------|---------------|----|
| 1 | はじめに..... | 1 |
| 1.1 | 研究背景..... | 1 |
| 1.2 | 研究目的..... | 2 |
| 1.3 | 既往研究..... | 3 |
| 2 | 研究方法..... | 4 |
| 2.1 | 解析手法..... | 4 |
| 2.1.1 | FDTD 法..... | 4 |
| 2.1.2 | 吸音率算出方法..... | 7 |
| 2.2 | 解析条件..... | 9 |
| 2.2.1 | 固定パラメータ..... | 9 |
| 2.2.2 | 変動パラメータ..... | 10 |
| 3 | 研究結果..... | 11 |
| 3.1 | 0.25 [m]..... | 11 |
| 3.2 | 0.5 [m]..... | 14 |
| 3.3 | 1.0 [m]..... | 17 |
| 3.4 | 2.0 [m]..... | 20 |
| 3.5 | 4.0 [m]..... | 23 |
| 4 | 考察..... | 26 |
| 5 | おわりに..... | 27 |
| | 参考文献..... | 28 |
| | 謝辞..... | 29 |

1 はじめに

1.1 研究背景

近頃、住宅の騒音が問題になることがしばしばある。マンションなどの共同住宅のみならず戸建住宅においても発生する問題を解決する為には室内の吸音材の性能が重要であり、この吸音材の性能を評価する値の一つとして乱入射吸音率がある。この値は残響室法吸音率に対応し、数値解析手法を用いて予測する場合には境界要素法がよく用いられる。これは開空間と平面波入射の考慮が他手法に比べて容易であり、乱入射吸音率を正確に評価できるためである。しかしながら、対象とするすべての周波数、すべての入射角度について毎回連立方程式を解く必要があり、その計算負荷は決して軽いとは言えない。

1.2 研究目的

本研究の目的はこれまで主に境界要素法を用いて予測していた乱入射吸音率を比較的計算が速い FDTD 法 (finite-difference time-domain method: 時間領域有限差分法) を用いて算出することを目的とする。これを実現するため、完全吸収層 (Perfectly Matched Layer: PML) によって模擬された剛床半無限空間と、周囲すべてを PML に囲まれた自由空間の二つの音場に吸音材を設置した場合を解析することで、吸音材が消費するエネルギーと吸音材に入射するみかけのエネルギーを算出し、それらを用いて吸音率を求めることを試みる。その結果を境界要素法によって求めた乱入射吸音率と比較し、FDTD 法を用いた算出方法の妥当性を検証する。

1.3 既往研究

米澤らの研究[1]では FDTD 法を用いて乱入射吸音率を求める際に必要な点音源配置、受音点配置として同心円状にそれらを配置し、算出を試みている。しかし、FDTD 法特有の空間を直方体に離散化する階段近似により理想的な円を形成出来ないため、評価点の重複や隙間が生じ、十分な精度で吸音率を算出できなかったものと考えられる。図 1 は階段近似によるずれについて模式的に表した図である。

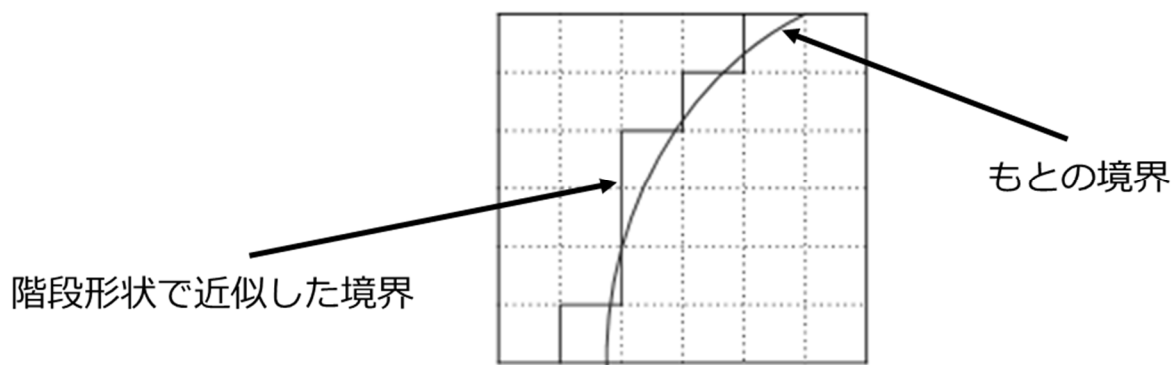


図 1 : FDTD 法における階段近似が要因の形状の誤差

2 研究方法

本研究では、一度の計算によって設定した時間ステップに対応するすべての周波数の値を求めることが可能な FDTD 法を用いて乱入射吸音率を算出する方法を提案し、境界要素法によって求めた値と比較することでその妥当性を検証する。なお、ここでは簡単のため二次元音場を対象とする。

2.1 解析手法

2.1.1 FDTD 法

FDTD 法とは、元は Yee[2]によって開発された電磁場解析手法の一つである。有限差分法の中でスタガードグリッドと呼ばれる互い違いの格子上に離散的に定義された物理量を時間発展的に交互に計算するリープフロッグアルゴリズムを用いた手法を FDTD 法と呼ぶ。FDTD 法では、以下に示す運動方程式と連続方程式を支配式として音波の解析を行う。図 2 の様に x, y の直交座標平面に寸法がそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ [m]で密度 ρ [kg/m³]の空気粒子があり、各面に音圧 p [N/m²]が加わっている状態であり、大気圧は運動に影響を与えない為考慮しない。そして図 3 の様に平面内の空気粒子の x, y 方向の変位を u_x, u_y [m]、体積弾性率を κ [N/m²]とすると支配式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$p = -\kappa \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

となる。この支配式を用いて音波の解析を行う。まず上記(2.1)~(2.3)式を一階の偏微分方程式とする為に、(2.3)式の両辺を時間微分するとともに、変位の時間微分を粒子速度に置き換える。 x, y 方向の粒子速度はそれぞれ v_x, v_y [m/s]とすると解くべき支配式は以下のように変形し、

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

となる。音圧や粒子速度は平面や時間に関して連続的に変化するが、計算機では連続的な関数を扱うことが不可能である。その為に、平面や時間のある単位で区切り、その区切りごとの離散的な値を用いることで連続的な関数を近似する。このように、平面（または、空間）や時間を単位で区切ることを離散化と呼び、空間に関する区切り幅を空間離散化幅、時間に関する区切り幅を時間離散化幅そして区切りごとの離散的な値を定めた点を参照点と呼ぶ。

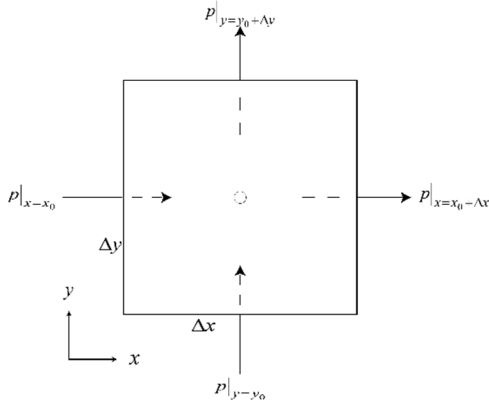


図 2 : 空気粒子に加わる力

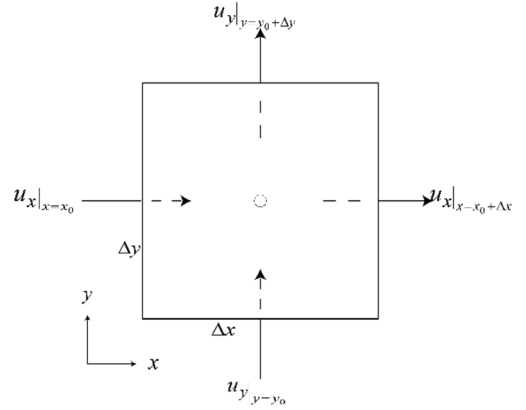


図 3 : 空気粒子方面の変位

ここで、二次元音場の場合の離散化について説明する。FDTD 法における音圧の離散化は、時間的なずれの表現を省略し、1つの音圧参照点とそれを囲うように配置された粒子速度参照点の空間的な配置を表現した図を図4に示す。これを Yee セルと呼ぶ。 x 方向に i 番目、 y 方向に j 番目の音圧参照点の位置を (i, j) と表すと、粒子速度はそれぞれの軸の変数に ± 0.5 を加えた座標となる。これらを空間ステップと呼ぶ。時間についても同様に、何番目の時間参照点であるかを n を用いて表し、この n を時間ステップと呼ぶ。

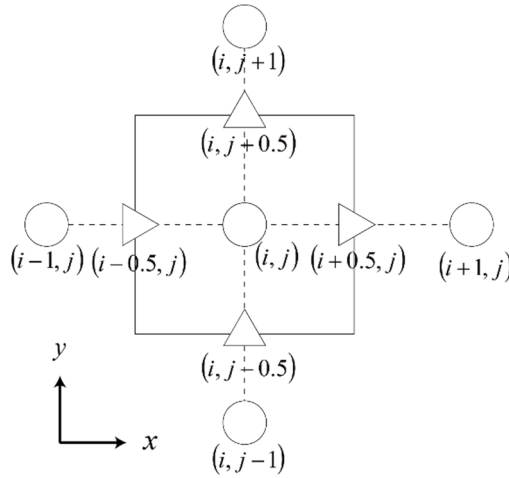


図 4 : Yee セル

ここで(2.4)式を例にとる。(2.4)式の右辺にある x に関する偏微分係数を

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p|_{x=x_0+\frac{\Delta x}{2}} - p|_{x=x_0-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \approx \frac{p|_{x=x_0+\frac{\Delta x}{2}} - p|_{x=x_0-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \quad (2.7)$$

のように近似する。このような近似の方法を中心差分スキームと呼ぶ。図4の配置を考慮し、(2.4)式に(2.7)式を適用すると、空間ステップ $(i+0.5, j)$ 且つ時間ステップ n の時刻について(2.4)式は

$$\rho \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n-0.5}(i+0.5, j)}{\Delta t} = - \frac{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

と近似できる。このようにスタガードグリッドを用いることで、空間微分にも時間微分にも(2.7)式と同様の近似を用いることが可能となる。同様に(2.8)式及び(2.9)式は

$$\rho \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n-0.5}(i, j+0.5)}{\Delta t} = - \frac{p^n(i, j+1) - p^n(i, j)}{\Delta y} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1}(i, j) - p^n(i, j)}{\Delta t} = & -\kappa \frac{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)}{\Delta x} \\ & - \kappa \frac{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.10)$$

と近似される。

(2.8)～(2.10)式において、最も時間ステップが大きい項のみを左辺に残すように変形すると

$$v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) = v_x^{n-0.5}(i+0.5, j) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \quad (2.11)$$

$$v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) = v_y^{n-0.5}(i, j+0.5) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \{p^n(i+1, j) - p^n(i, j)\} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1}(i, j) = & p^n(i, j) - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \{v_x^{n+0.5}(i+0.5, j) - v_x^{n+0.5}(i-0.5, j)\} \\ & - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta y} \{v_y^{n+0.5}(i, j+0.5) - v_y^{n+0.5}(i, j-0.5)\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。(2.11)式は、時間ステップ $n-0.5$ を“過去”、 n を“現在”、 $n+0.5$ を“未来”の状態と考えれば、空間ステップ $(i+0.5, j)$ の位置の“過去”の v_x の値と、その周囲の“現在”の p の値から、“未来”の v_x の値を求める式と解釈できる。(2.12)式についても同様である。また、これらの計算を全ての空間ステップに対して行えば、“過去”の粒子速度分布と“現在”の音圧分布から“未来”の粒子速度が得られることになる。次に、時間ステップを半ステップ進め、 n を“過去”、 $n+0.5$ を“現在”、 $n+1$ を“未来”の状態と考えれば(2.13)式は“過去”の音圧分布と“現在”の粒子速度分布から“未来”の音圧分布を求める式と解釈できる。

以上のことから初期時刻の粒子速度分布と音圧分布の一組さえ既知であれば、以降のそれぞれの分布は(2.11)式、(2.12)式と(2.13)式を全空間ステップについて交互に計算することで、次々と新しい時間ステップのものを求めることが可能となる。このような粒子速度と音圧の計算を空間的にも時間的にも互い違いに行う方法をリーブフロッグアルゴリズムと呼ぶ。

以上が FDTD 法の最も特徴的な点である。FDTD 法についての詳しい説明は参考文献[3]を参照されたい。

2.1.2 吸音率算出方法

FDTD法を用いて、床が剛で他三方向がPMLに囲われた二次元解析音場(A)：図5にて入射波として点音源から受音点を通過する音圧と粒子速度、その後吸音材で反射し、反射波として受音点を通過する音圧と粒子速度を得る。これらのフーリエ変換から入射エネルギー E_i と反射エネルギー E_r を算出する。なお、入射波と反射波の区別は、時間応答波形を見て分離した。また、四方をPMLに囲まれた二次元解析音場(B)：図6にて入射波として点音源から解析音場(A)に設置された吸音材と同じ位置の受音点を透過する音圧と粒子速度を得る。これらのフーリエ変換から見かけの入射エネルギー E_p を算出する。

さて、吸音率は入射エネルギーから反射エネルギーを引き(=吸音材が消費したエネルギー)、それと見かけの入射エネルギーとの比を取ることで求められる。各受音点でのインテンシティ I [w/m²]は

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p \cdot v^* \} \quad (2.14)$$

で算出される。ここで、 p は音圧、 v^* は粒子速度の複素共役であり、 $\operatorname{Re}\{\}$ は $\{\}$ 内の実部を表している。この式に上述の入射波と反射波の音圧と粒子速度をそれぞれ代入し、入射エネルギー、反射エネルギー、見かけの入射エネルギーを求める。本研究では受音点は280個存在する為、受音点全てについてエネルギーを求め、足し合わせることで対象とする解析音場についての乱入射吸音率 α を(2.15)式で算出する。

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_p} \quad (2.15)$$

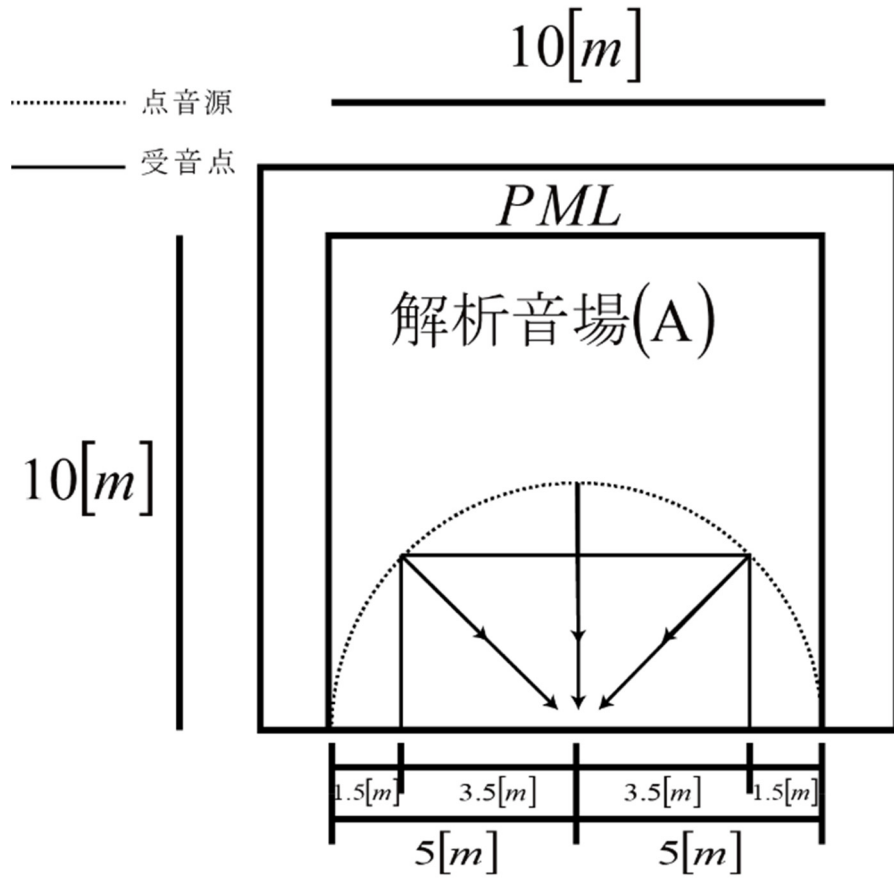


図5：解析音場 (A)

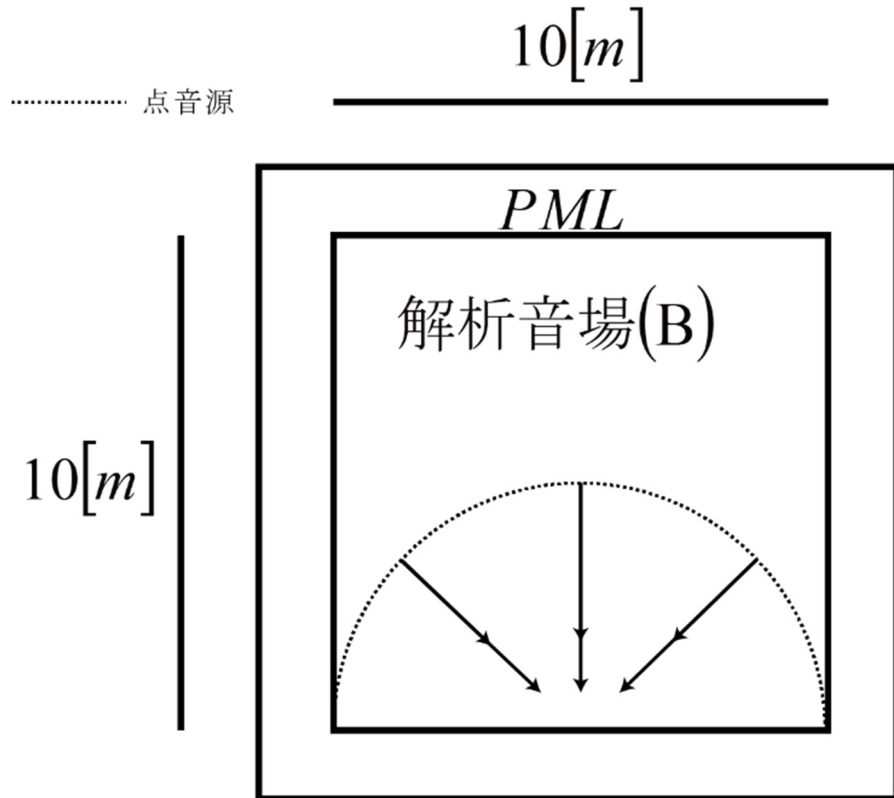


図6：解析音場 (B)

2.2 解析条件

ここでは本研究で考えた解析条件を示す。パラメータには、すべての場合に共通の固定パラメータと、場合ごとに異なる値を与えてその効果を見るための変動パラメータがある。

2.2.1 固定パラメータ

解析領域は x 方向、 y 方向共に 10 [m]、空間離散化幅は 5×10^{-2} [m]、時間離散化幅は 1×10^{-4} [s]、解析時間は 1 [s]、空気の音速は 343.5 [m/s]、空気の密度は 1.205 [kg/m³]とする。音源に与える時間波形はガウシアンパルスとし、ピーク最大値が 1 [m³/s]、急峻さを表す係数が 2×10^6 、ピーク時間が 3×10^{-3} [s]である。点音源の個数は 180 個とし、床中央を中心に半径 5 [m]の半円状、すなわち、 1° につき一つ点音源が存在するよう設定した。PML 層数は 64 であり、PML 減衰係数テーパー乗数は 4、PML 減衰係数最大値は 7.916×10^{-2} とした。

解析音場 (A) では左右上側の三方向を PML が囲み、下側を吸音材を置く床面として吸音率ゼロの剛壁としている。受音点は既往研究[1]での半円状の点音源に沿う形に設置すると階段近似の影響を受け、理想とする半円を形成できないという結果を受け、階段近似の影響を無くす為に半円ではなく矩形に受音点を設置した。本研究では、図 5 に示すように床中心から 45° 、 135° の方向で点音源を並べた半円に接するよう配置した。吸音材は床中心から x 軸方向へ左右均等に設置した。なお、吸音材の厚みはゼロとし、実数の垂直入射インピーダンスを与えることで吸音率を与えた。

解析音場 (B) は四方向を PML に囲まれており、解析音場 (A) と同じ位置に想定した吸音材位置での見かけの入射エネルギーを得るため、受音点は吸音材の位置に設置した。

2.2.2 変動パラメータ

ここでは (A) における吸音材の幅と吸音材の吸音率について述べる。まず、吸音材の幅については幅が 0.25 [m], 0.5 [m], 1 [m], 2 [m], 4 [m] の五種類を用意した。そして吸音材の垂直入射吸音率についても、0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 の五種類を用意し合計二十五種類の条件を設定した。

3 研究結果

解析周波数域は 62.5～500 [Hz]である。結果は吸音材の幅毎にまとめ、図 7～図 31 に示す。なお、吸音率は通常 0～1 の間の値を取るが実際の測定や数値解析を用いた計算では吸音材が吸音したことによって生じる吸音材付近の音圧差により、吸音材方向へ過剰に音圧が流れ込み、吸音率は 1 を超える。これを面積効果と呼ぶ。

3.1 吸音材の幅 0.25 [m]

図 7～11 に吸音材の幅が 0.25 [m]の場合の結果を示す。FDTD 法の結果には上下の変動が見られた。変動は低域で大きく、周波数が高くなるにつれ小さくなる傾向が見られた。変動の平均値は概ね境界要素法と一致したが、吸音材の吸音率が高くなるにつれ、境界要素法の値よりも少し低くなる傾向が見られた。

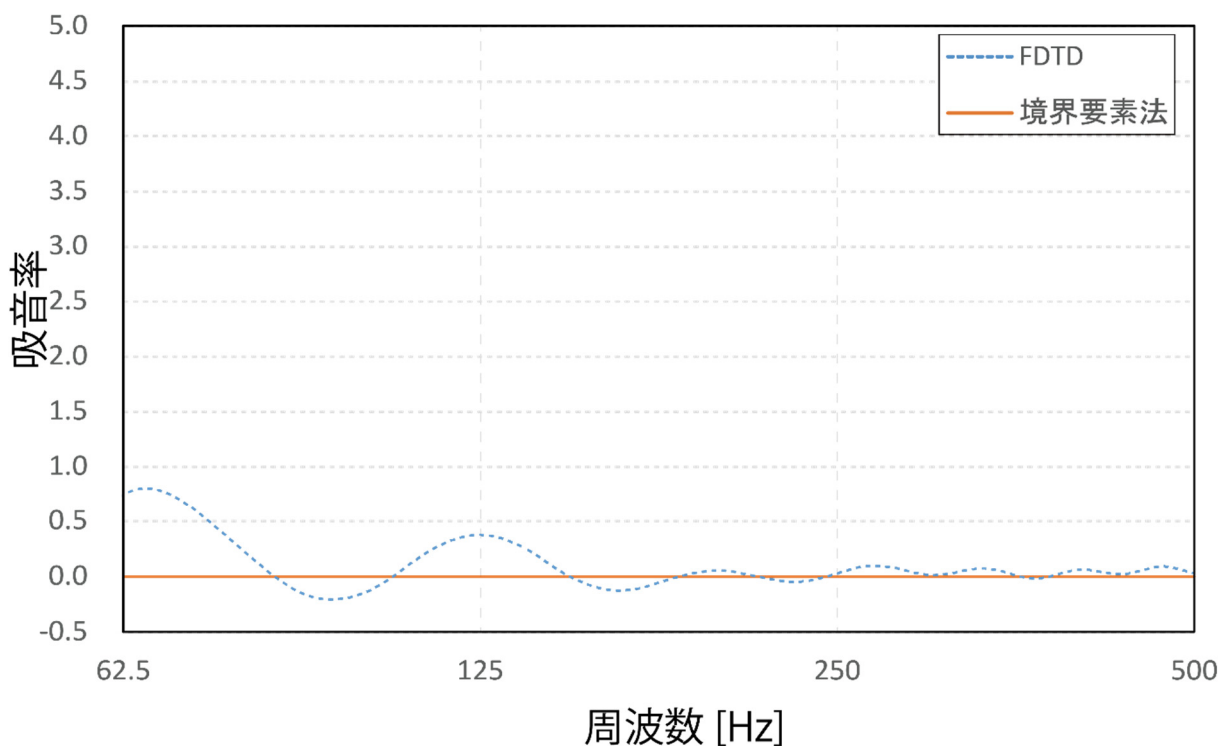


図 7 : 吸音材 幅 0.25 [m] 吸音率 0.00

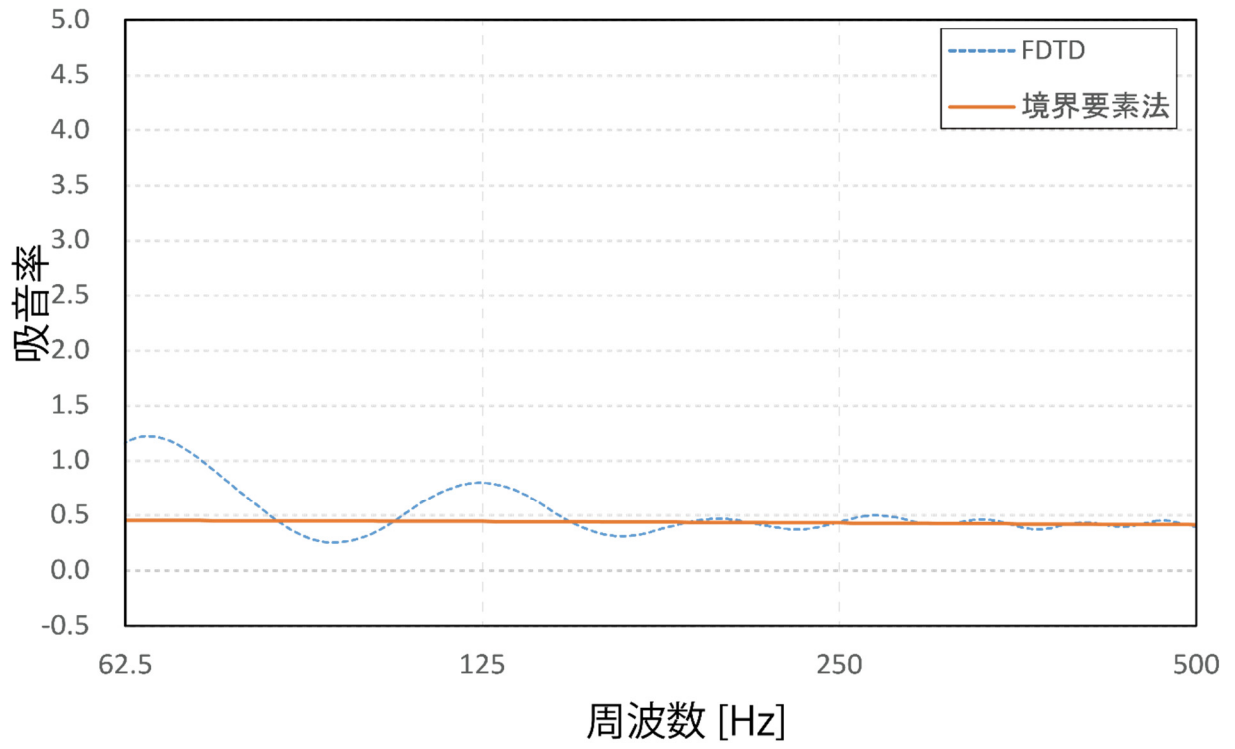


図 8 : 吸音材 幅 0.25 [m] 吸音率 0.25

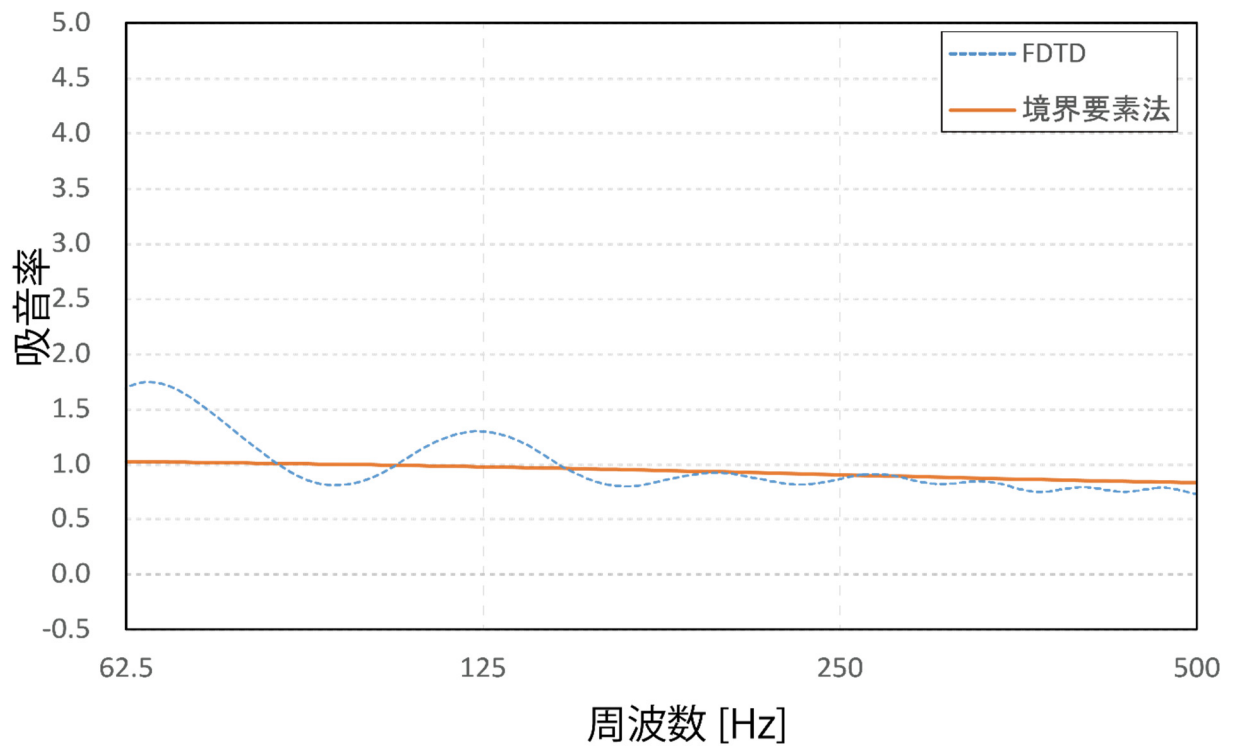


図 9 : 吸音材 幅 0.25 [m] 吸音率 0.50

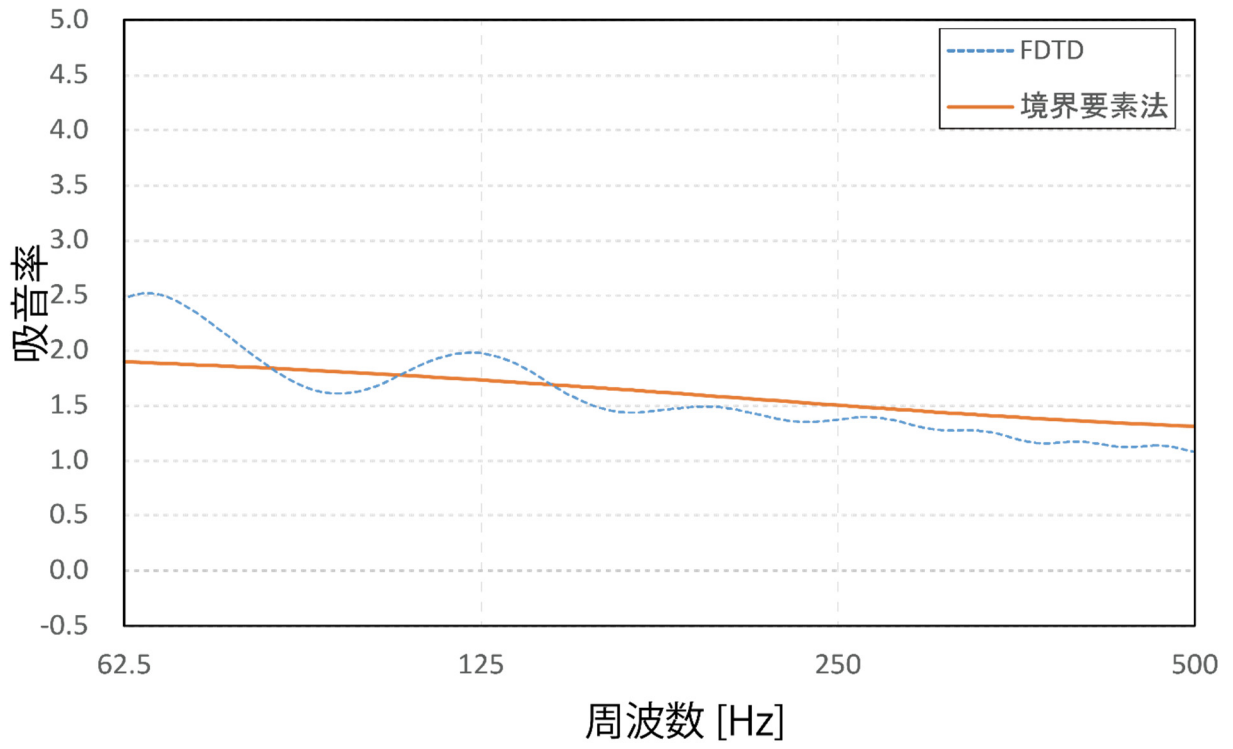


图 10 : 吸音材 幅 0.25 [m] 吸音率 0.75

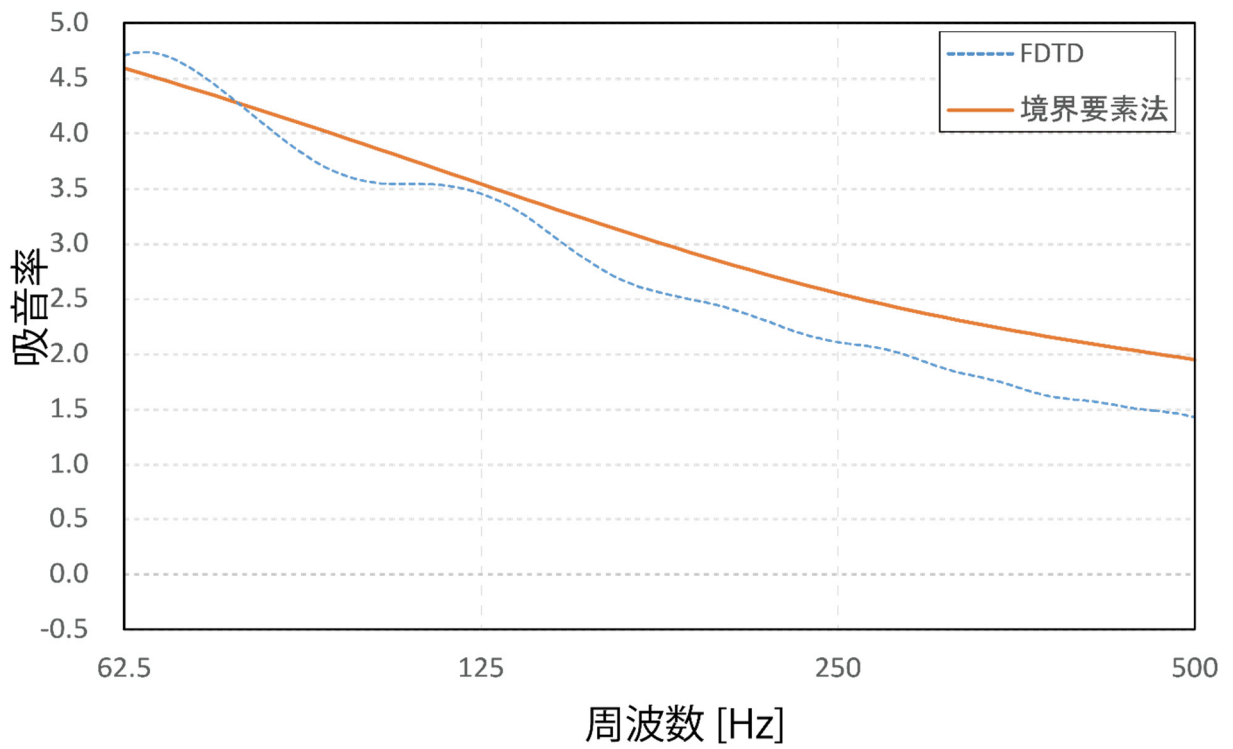


图 11 : 吸音材 幅 0.25 [m] 吸音率 1.00

3.2 吸音材の幅 0.5 [m]

図 12～16 に吸音材の幅が 0.5 [m] の場合の結果を示す。この条件では吸音材の幅 0.25[m] の結果と比較すると、変動が少し小さくなっており、境界要素法の結果により近い値が得られた。しかし、吸音率が大きくなるにつれ、また、周波数域が低くなるにつれ、境界要素法の値との差異が大きくなる傾向は吸音材の幅 0.25 [m] の場合と同様であった。

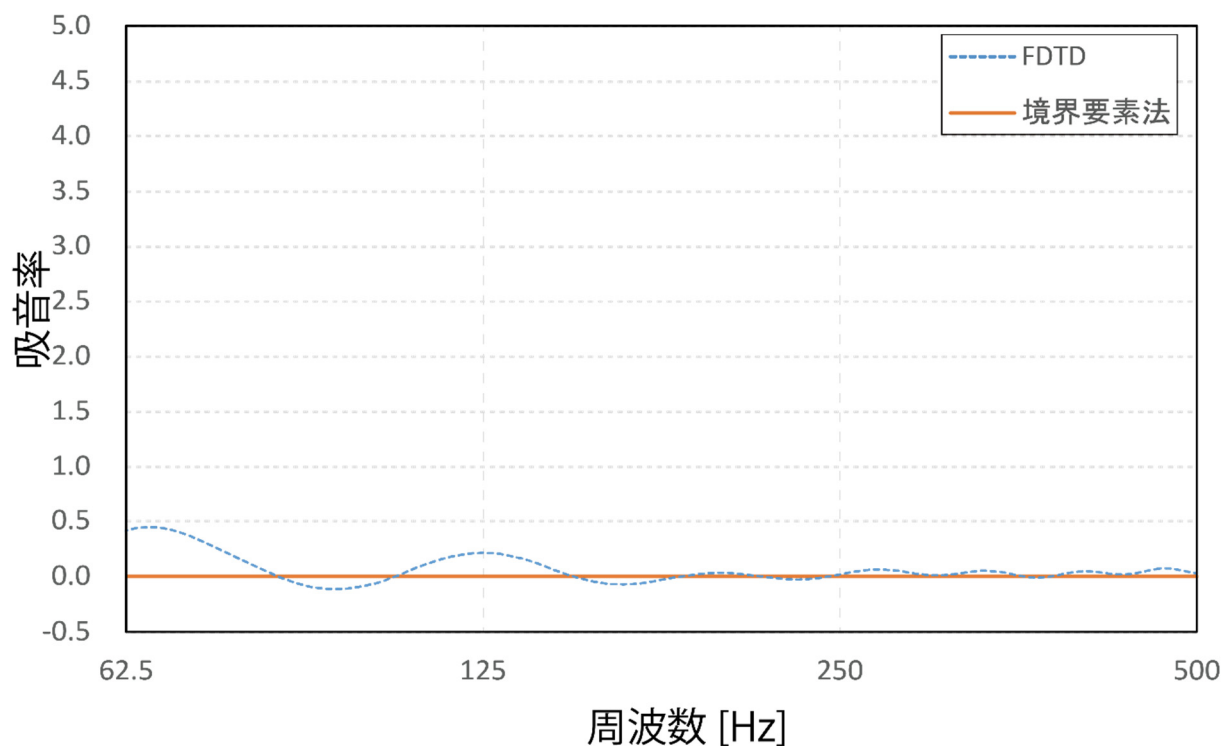


図 12 : 吸音材 幅 0.5 [m] 吸音率 0.00

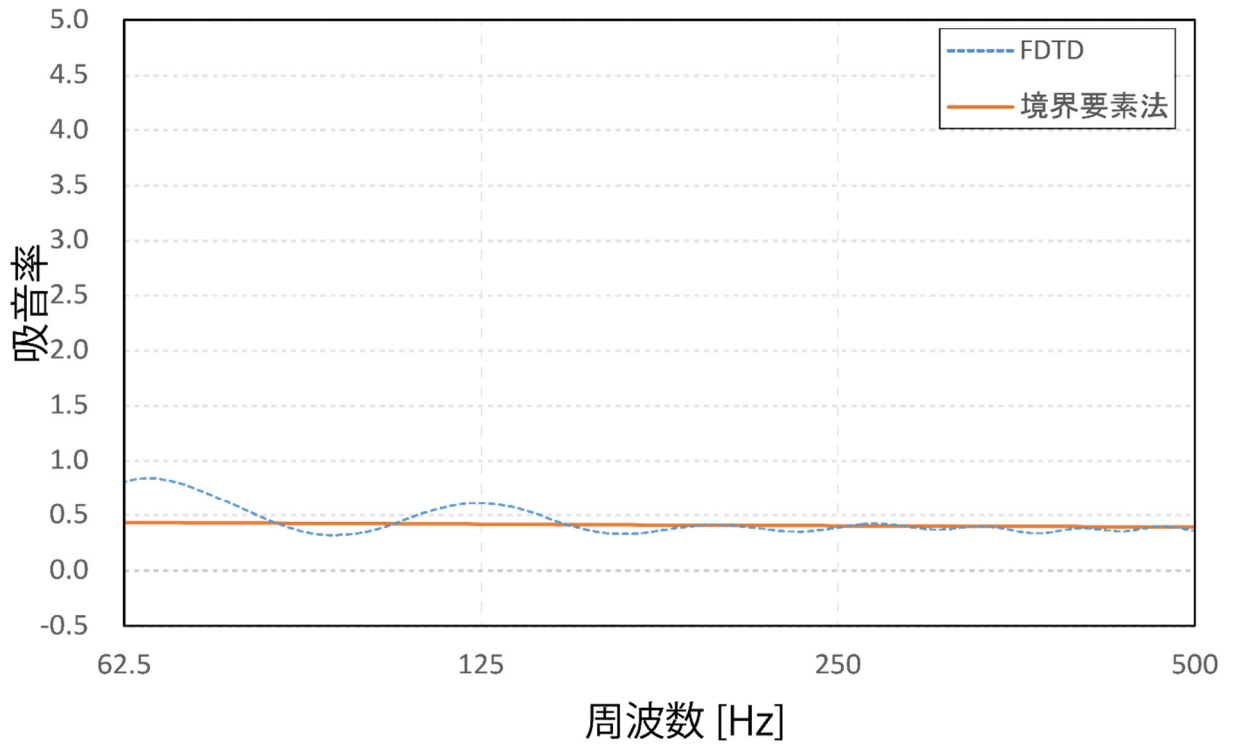


图 13 : 吸音材 幅 0.5 [m] 吸音率 0.25

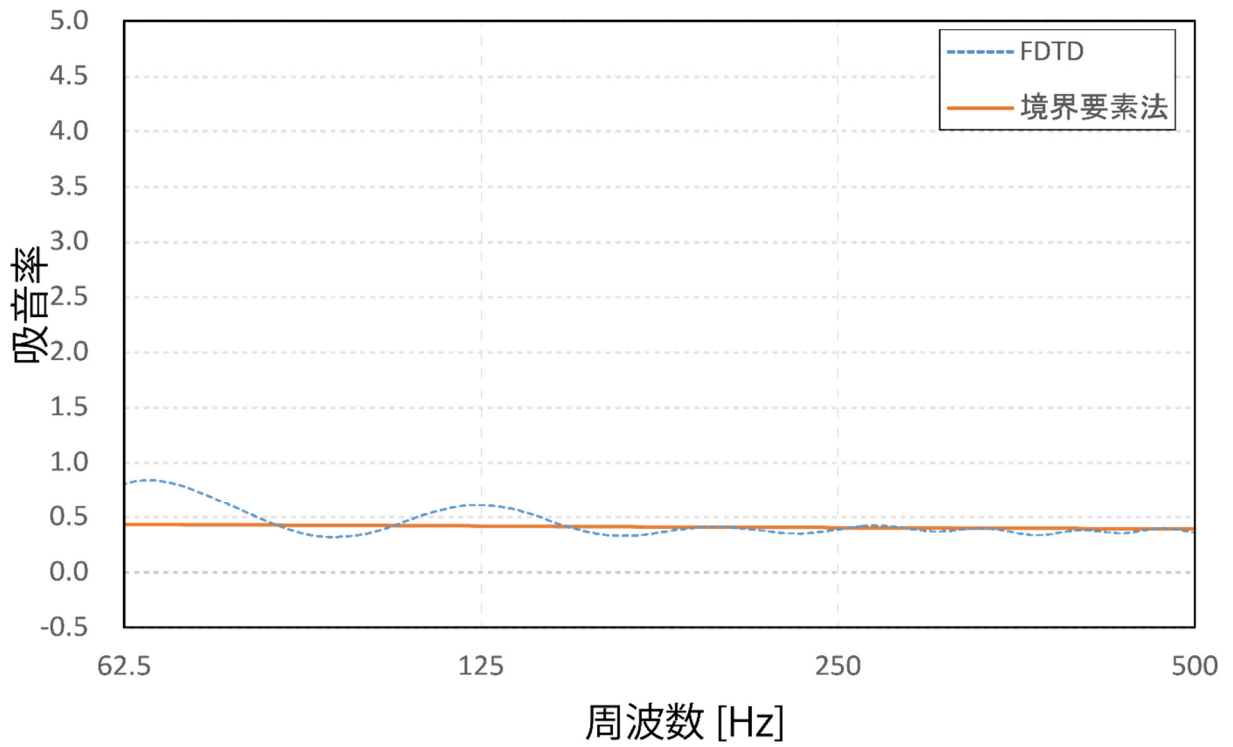


图 14 : 吸音材 幅 0.5 [m] 吸音率 0.50

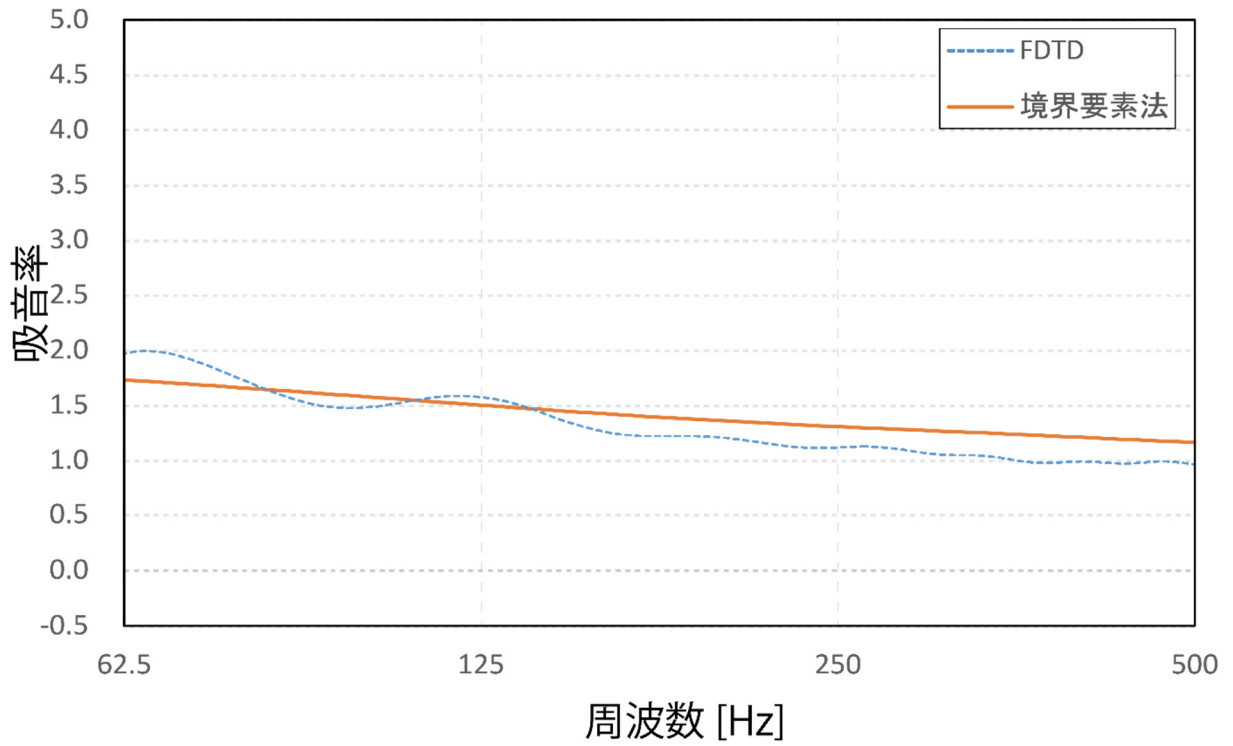


图 15 : 吸音材 幅 0.5 [m] 吸音率 0.75

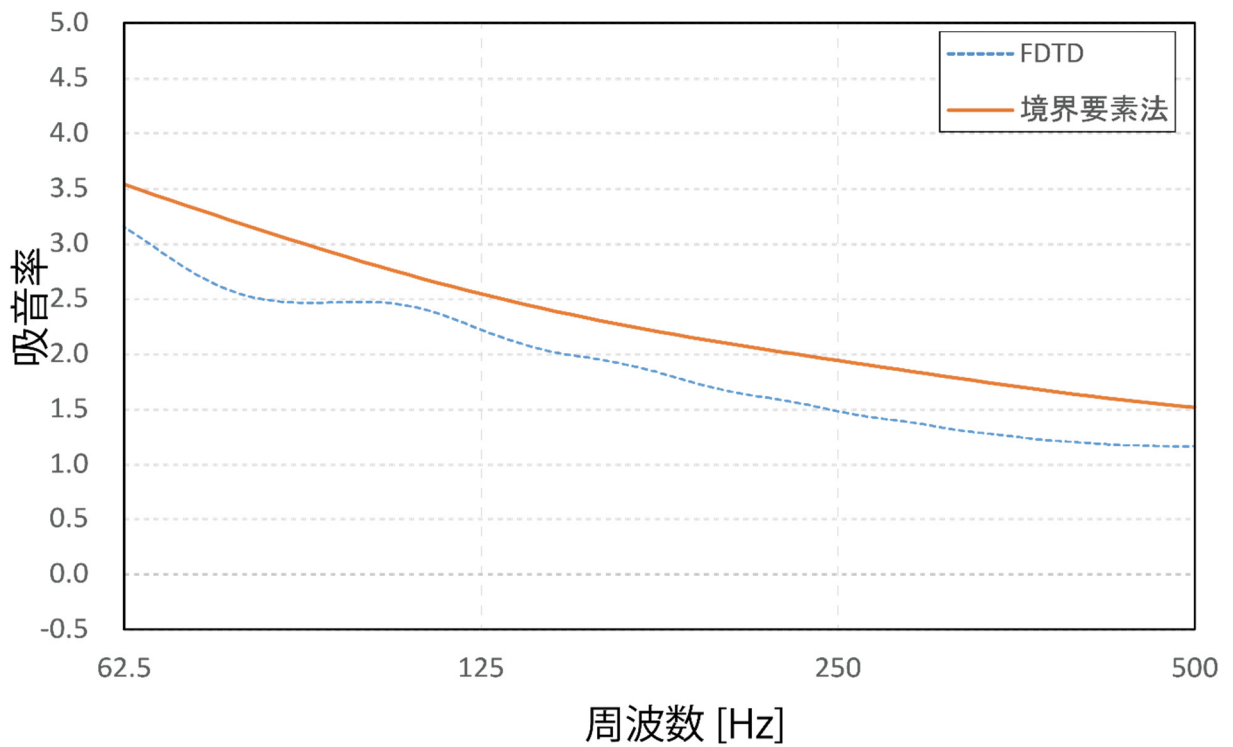


图 16 : 吸音材 幅 0.5 [m] 吸音率 1.00

3.3 吸音材の幅 1.0 [m]

図 17～21 に吸音材の幅が 1.0 [m] の場合の結果を示す。この条件でも前節と同様の傾向が見られた。すなわち、吸音材の幅が小さい場合の結果と比較すると、変動が小さくなっており、境界要素法の結果により近い値が得られ、吸音率が大きくなるにつれ、また、周波数域が低くなるにつれ、境界要素法の値との差異が大きくなった。

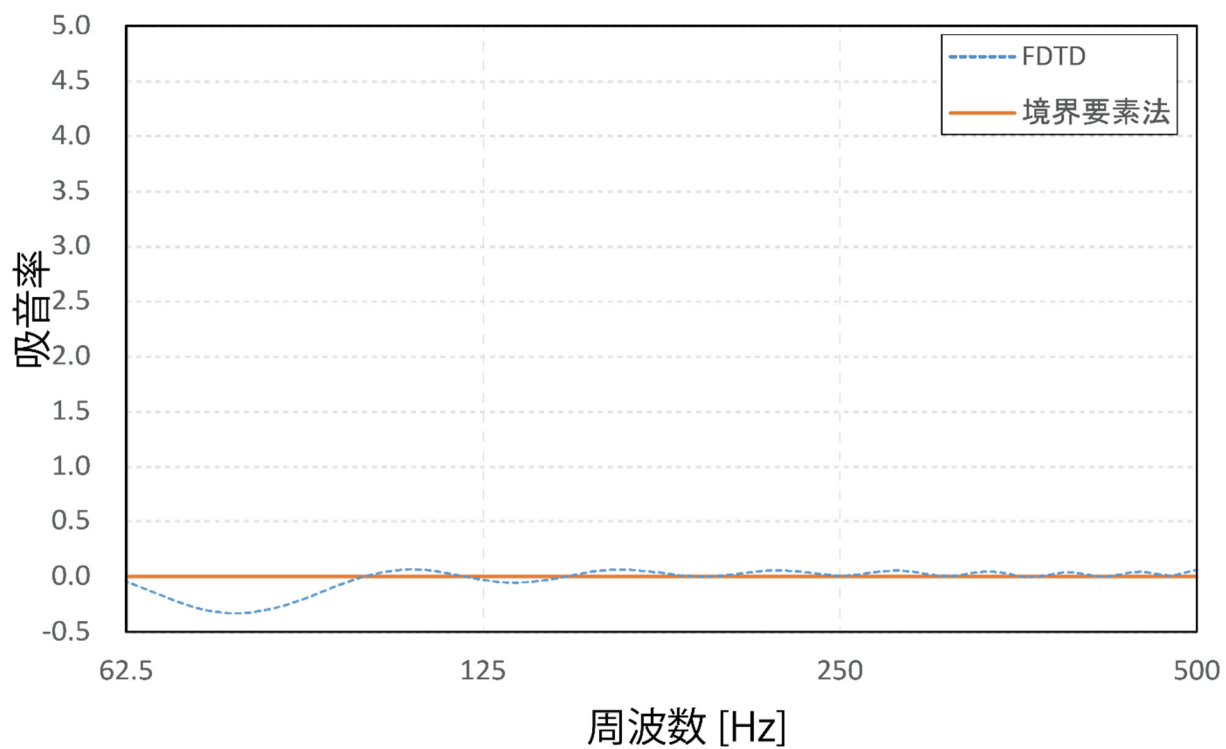


図 17 : 吸音材 幅 1.0 [m] 吸音率 0.00

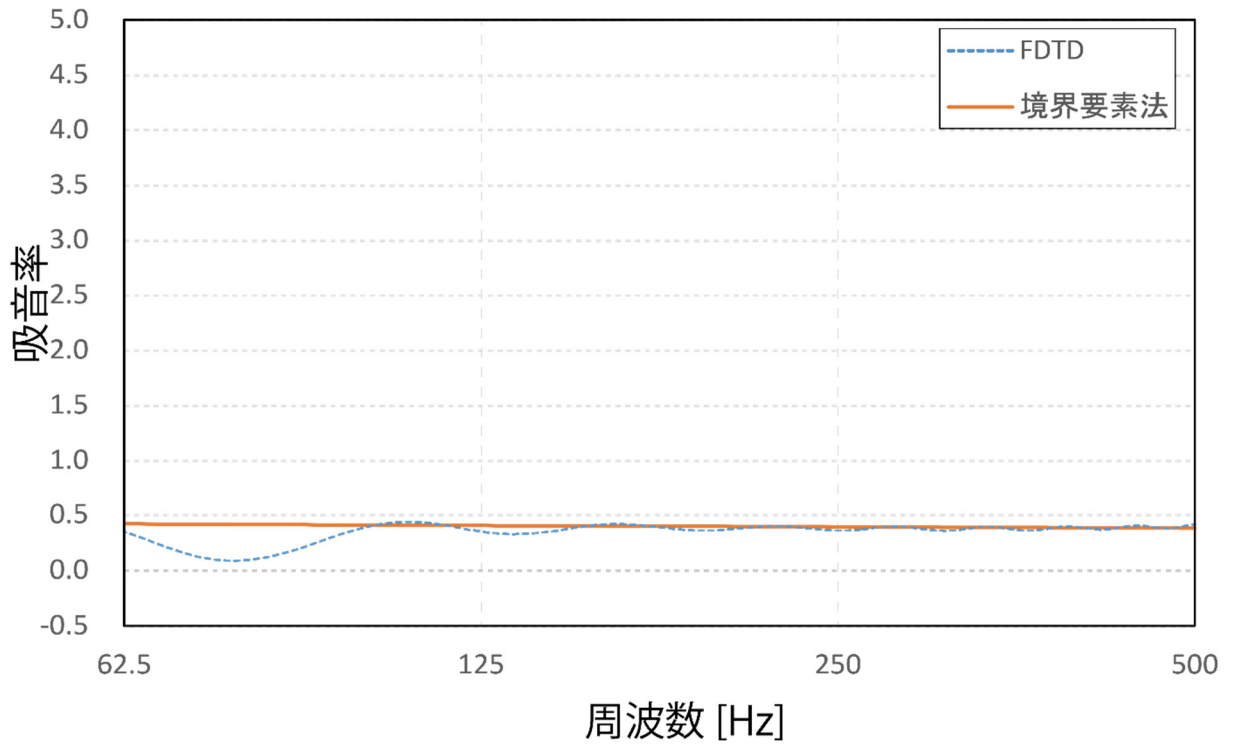


图 18 : 吸音材 幅 1.0 [m] 吸音率 0.25

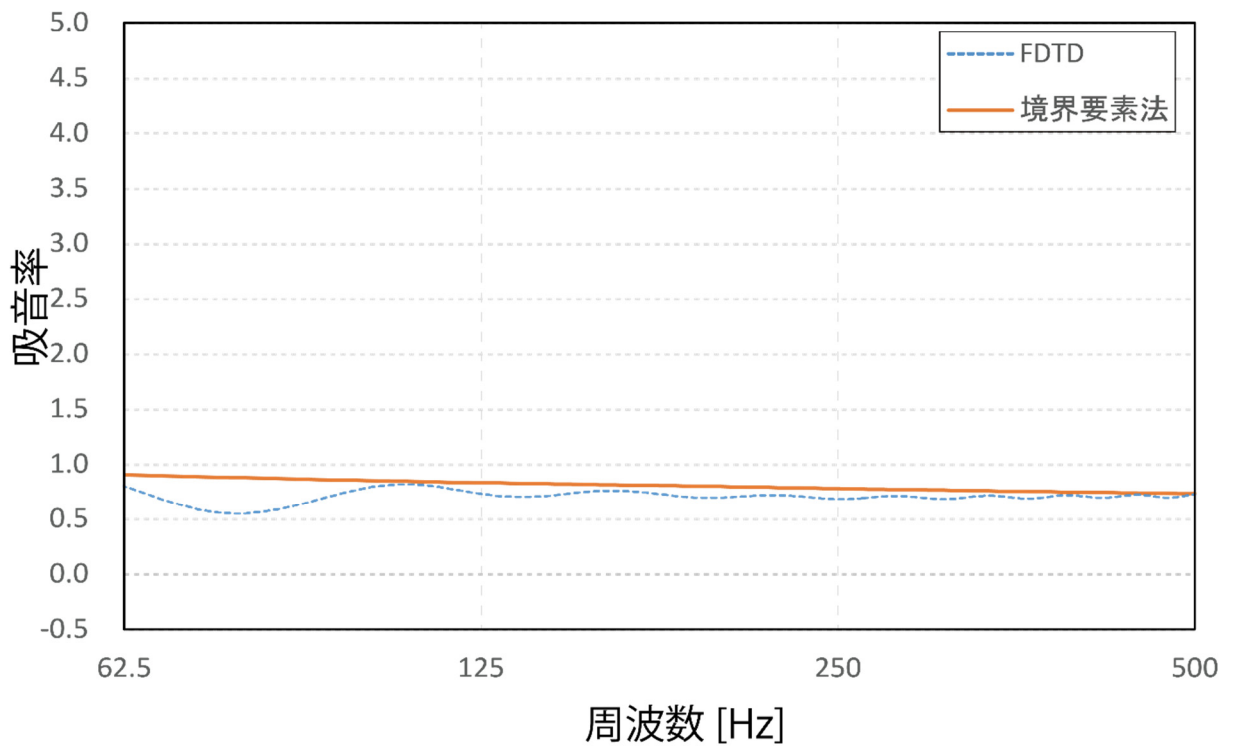


图 19 : 吸音材 幅 1.0 [m] 吸音率 0.50

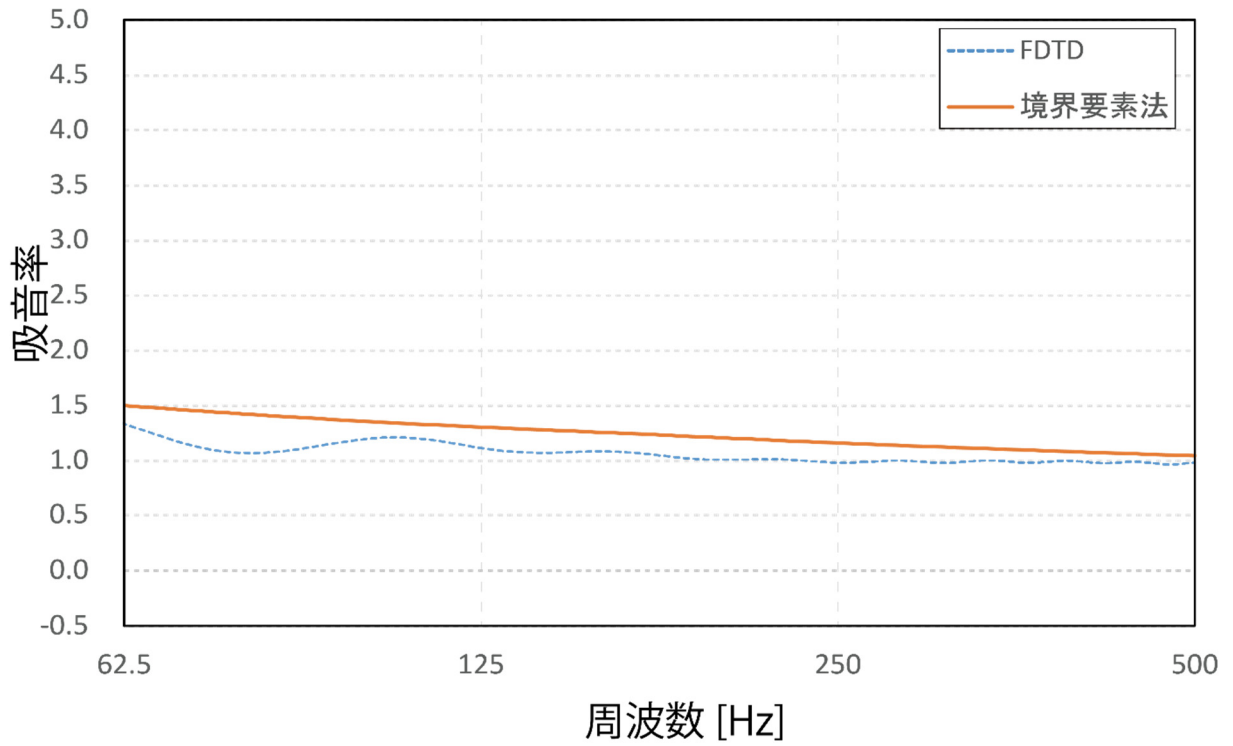


図 20 : 吸音材 幅 1.0 [m] 吸音率 0.75

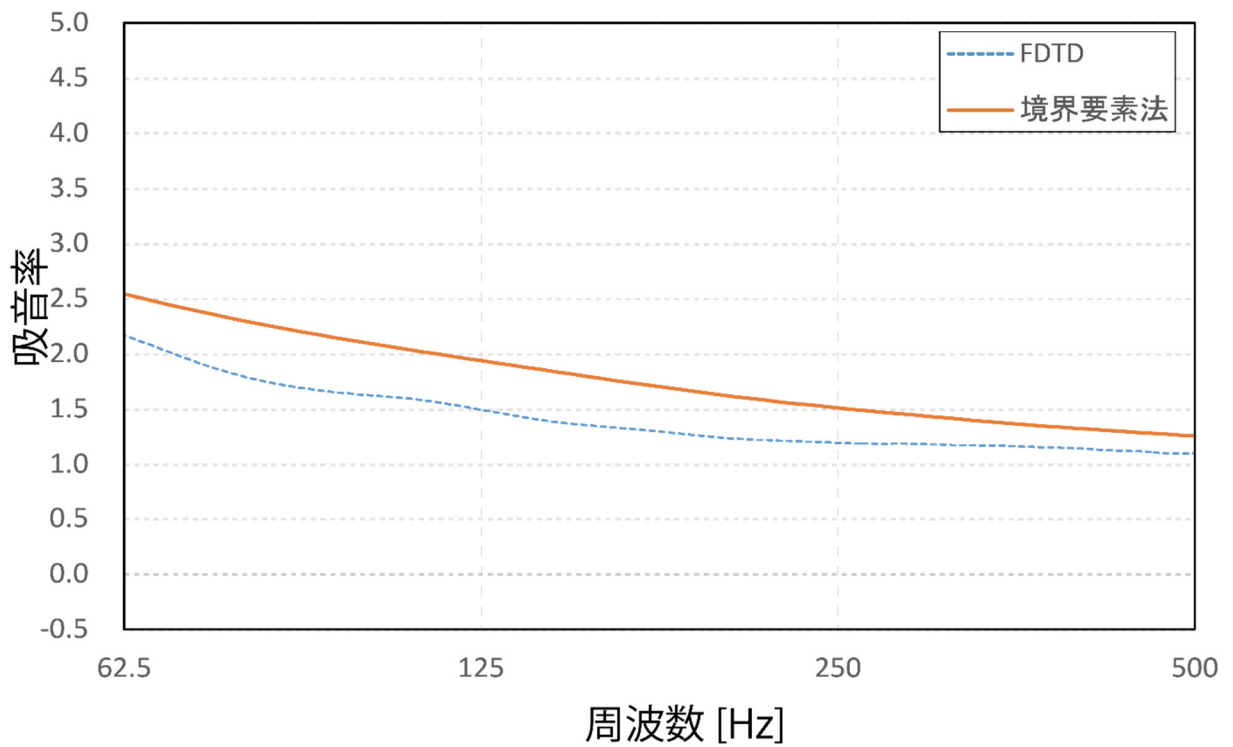


図 21 : 吸音材 幅 1.0 [m] 吸音率 1.0

図 22～26 に吸音材の幅が 2.0 [m] の場合の結果を示す。この条件でも前節と同様の傾向が見られた。すなわち、吸音材の幅が小さい場合の結果と比較すると、変動が小さくなっており、境界要素法の結果により近い値が得られ、吸音率が大きくなるにつれ、また、周波数域が低くなるにつれ、境界要素法の値との差異が大きくなった。

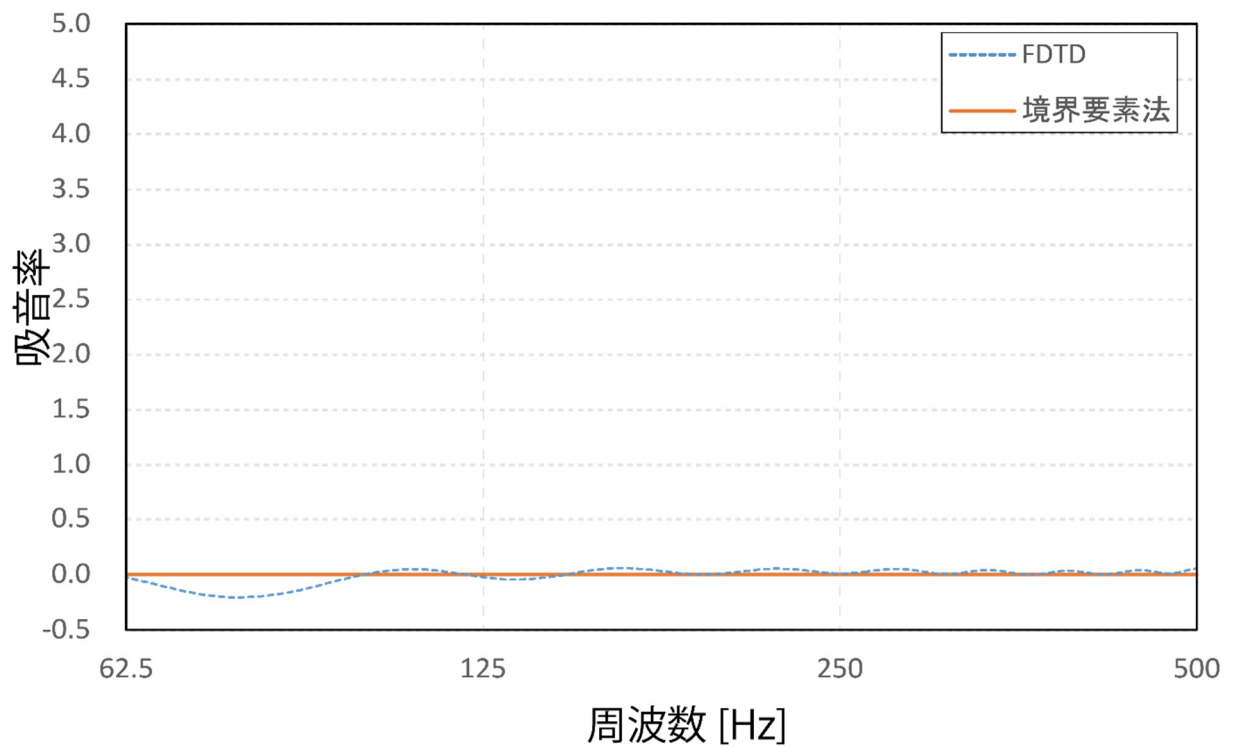


図 22 : 吸音材 幅 2.0 [m] 吸音率 0.00

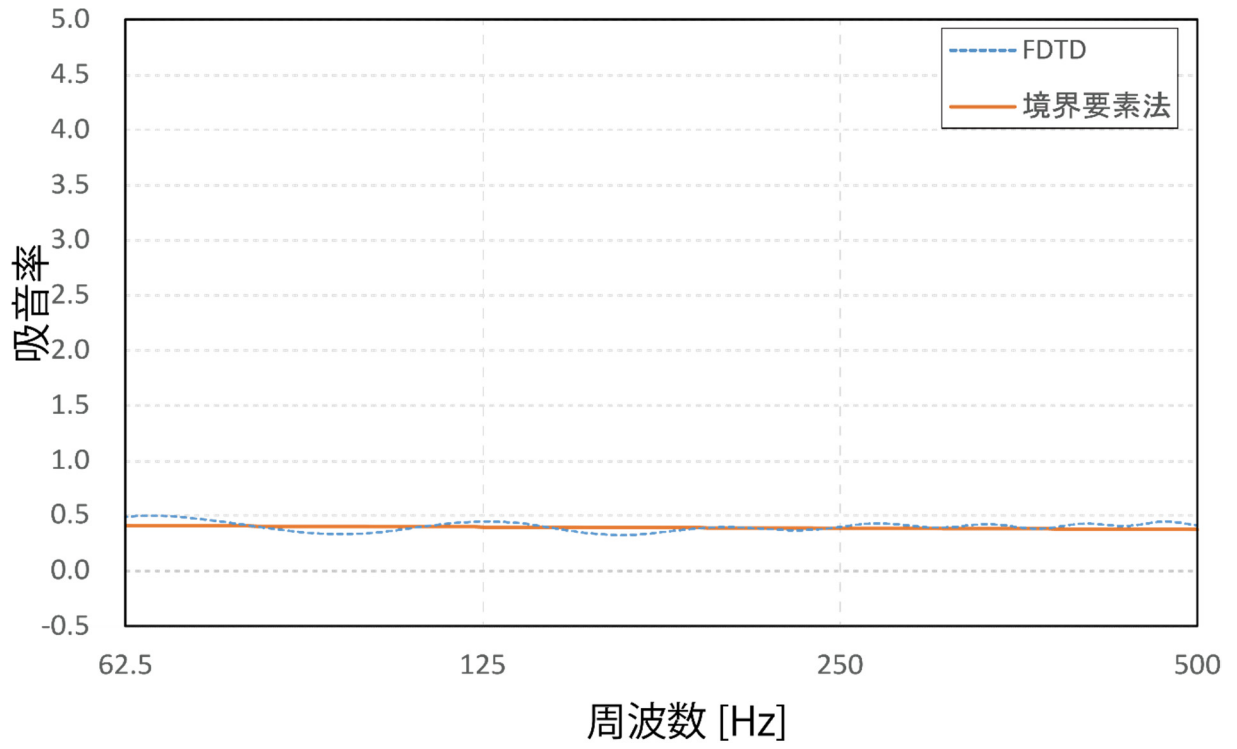


图 23 : 吸音材 幅 2.0 [m] 吸音率 0.25

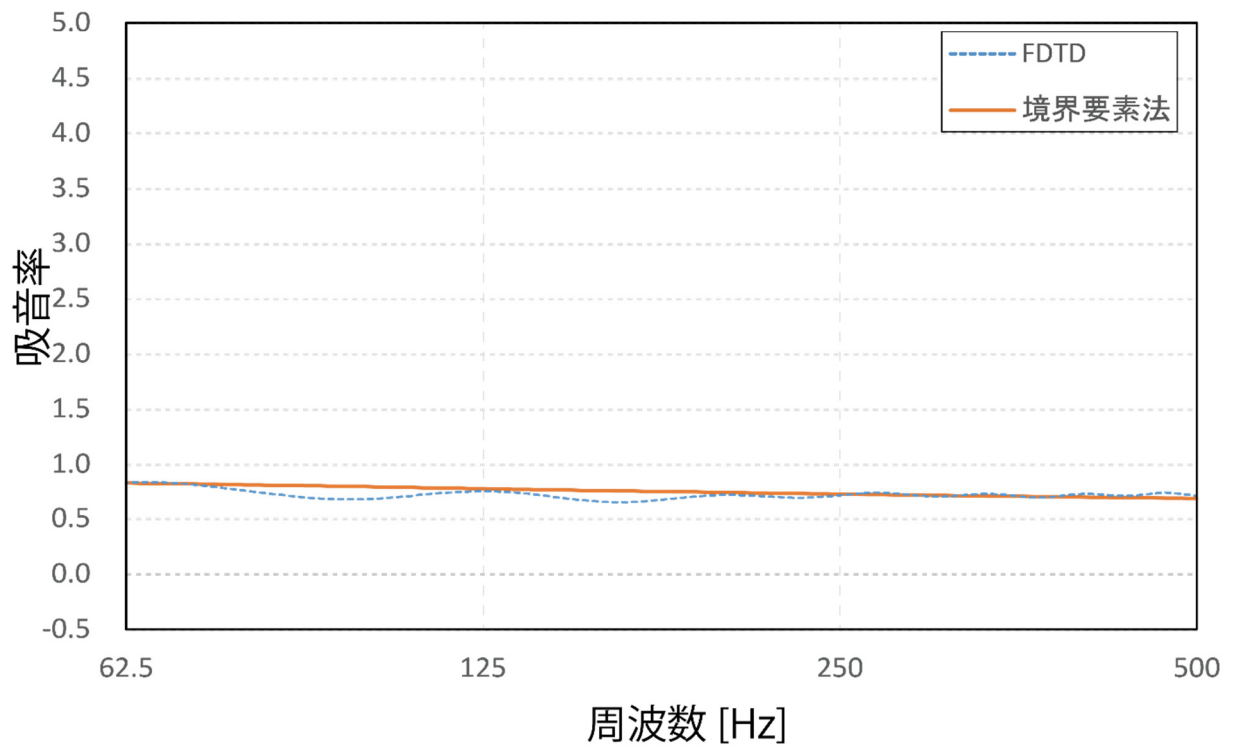


图 24 : 吸音材 幅 2.0 [m] 吸音率 0.50

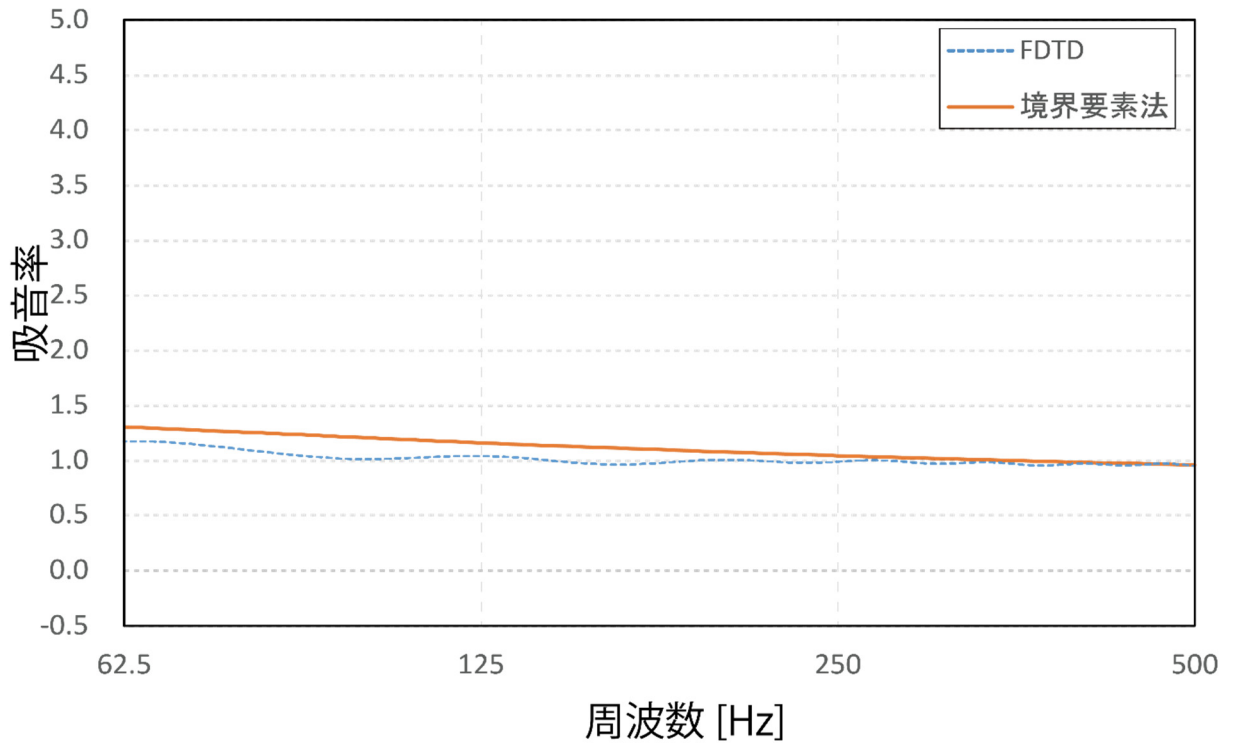


图 25 : 吸音材 幅 2.0 [m] 吸音率 0.75

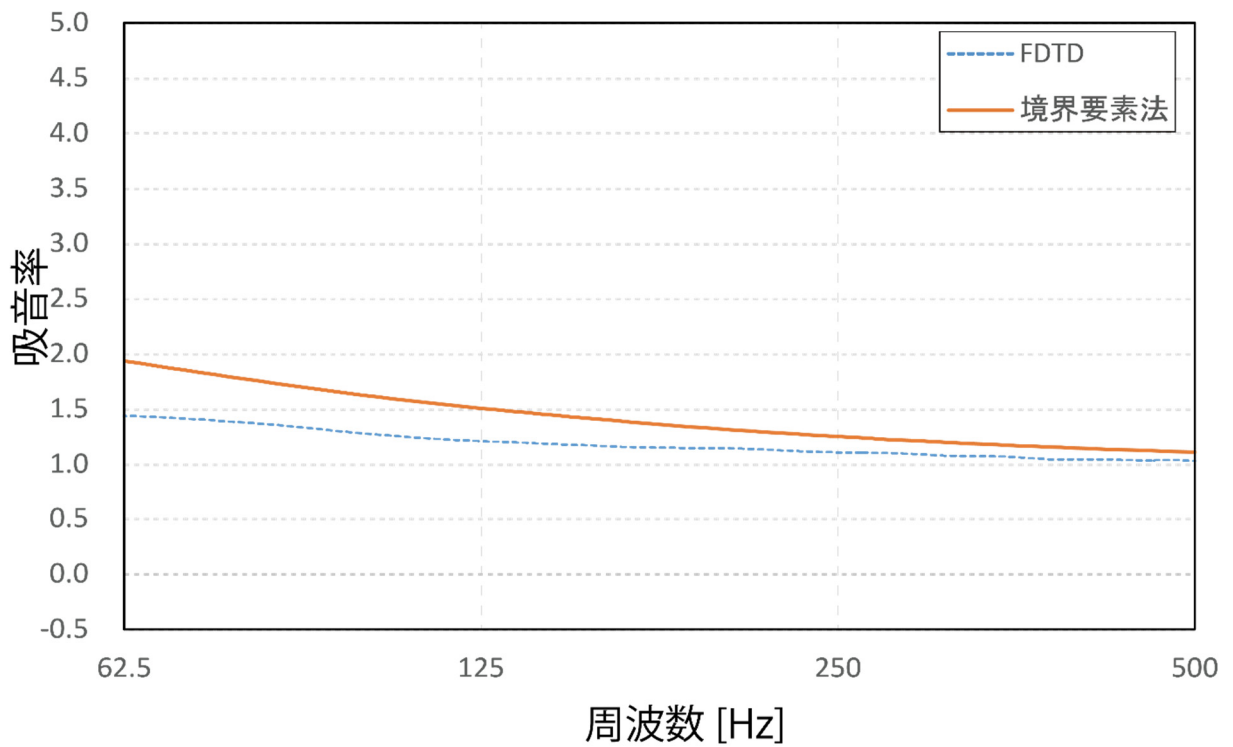


图 26 : 吸音材 幅 2.0 [m] 吸音率 1.00

3.5 吸音材の幅 4.0 [m]

図 27～31 に吸音材の幅が 4.0 [m] の場合の結果を示す。本研究で検討した中では境界要素法と最も良い一致が得られたが、この条件でも前節と同様の傾向が見られた。すなわち、吸音材の幅が小さい場合の結果と比較すると、変動が小さくなっており、境界要素法の結果により近い値が得られ、吸音率が大きくなるにつれ、また、周波数域が低くなるにつれ、境界要素法の値との差異が大きくなった。

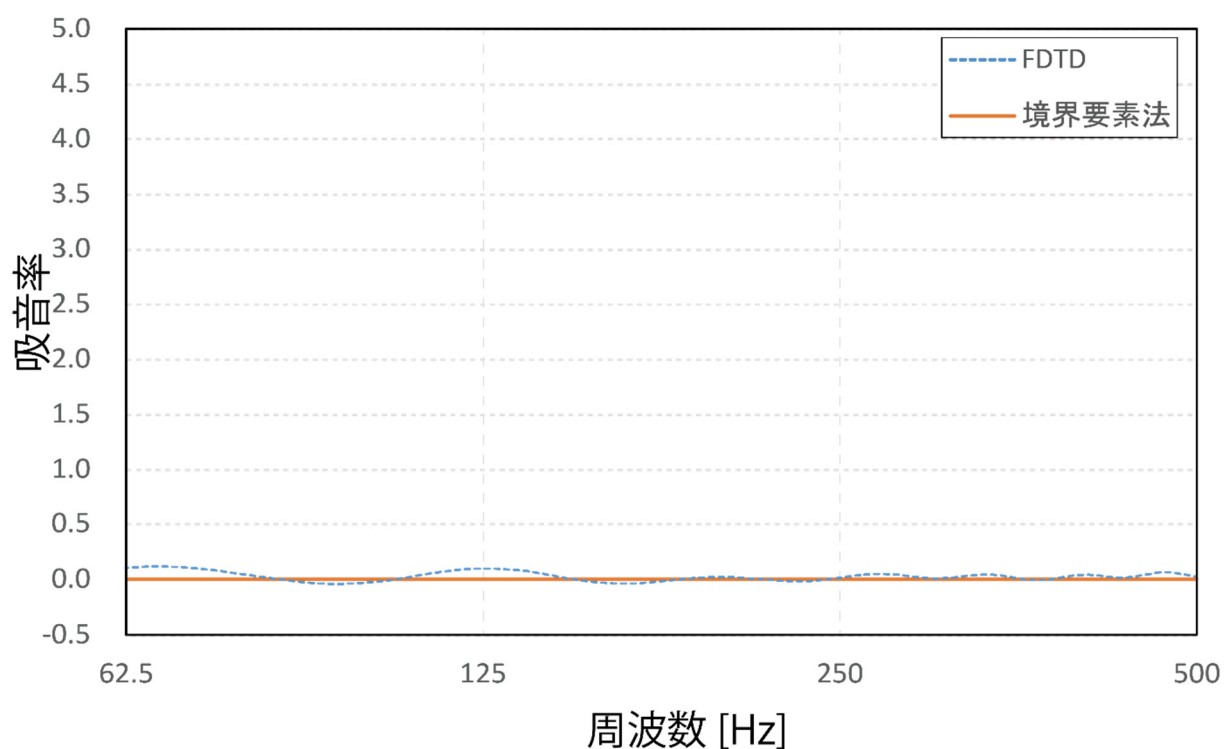


図 27 : 吸音材 幅 4.0 [m] 吸音率 0.00

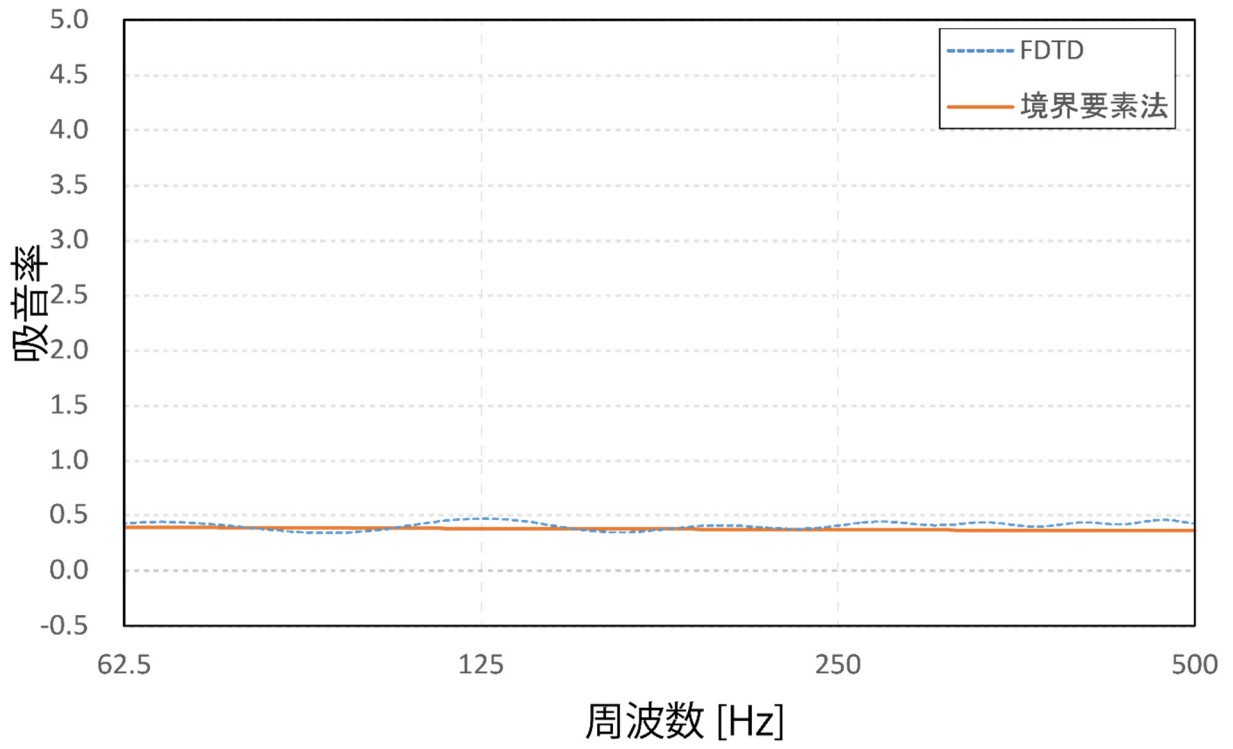


图 28 : 吸音材 幅 4.0 [m] 吸音率 0.25

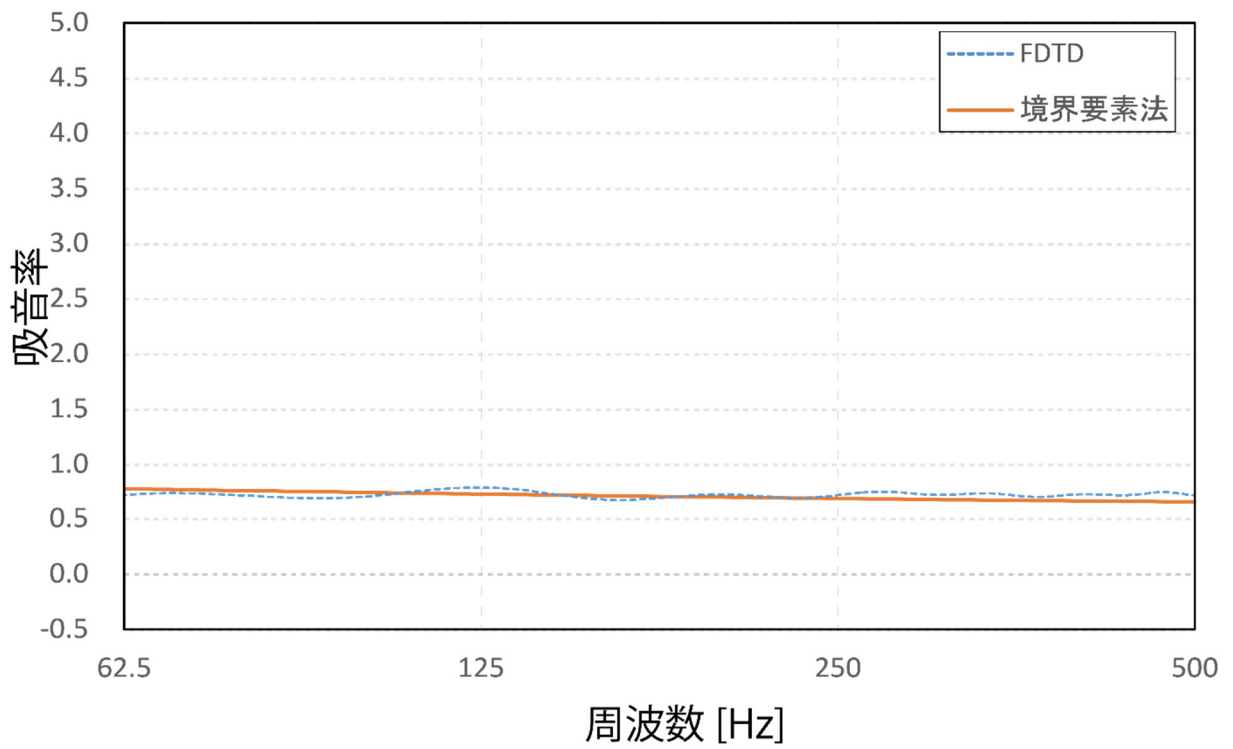


图 29 : 吸音材 幅 4.0 [m] 吸音率 0.50

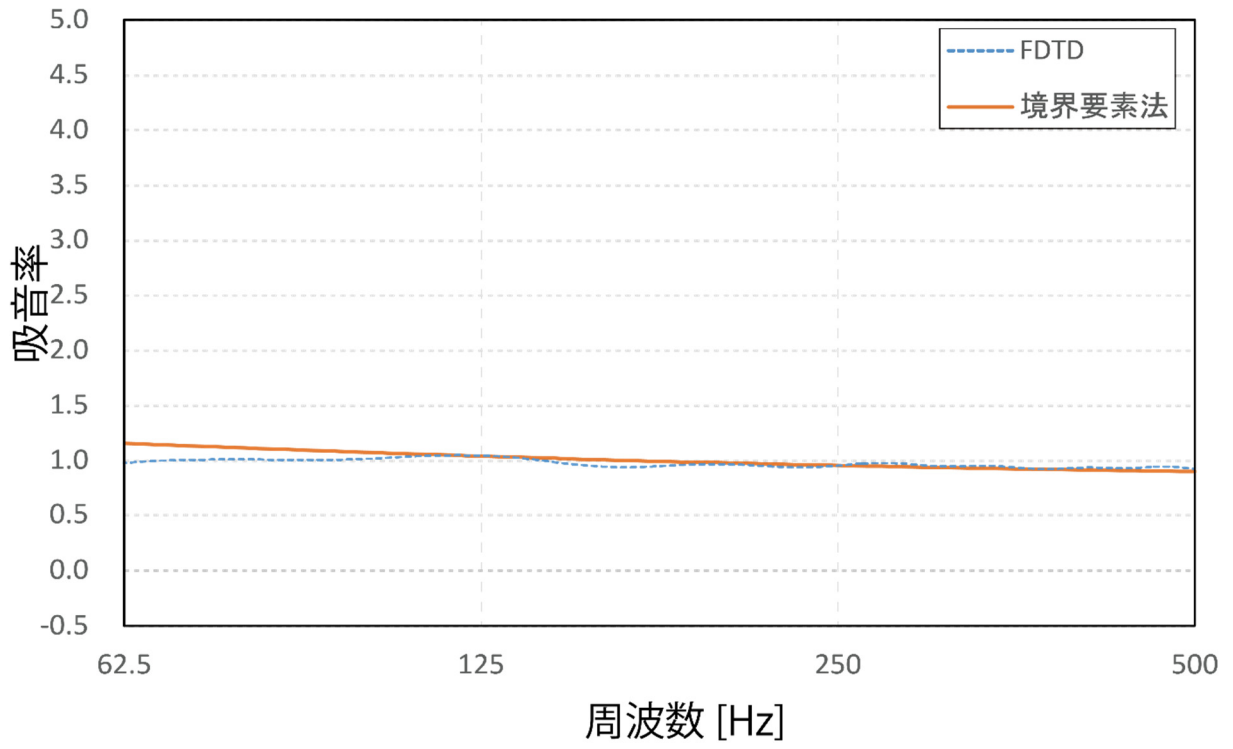


图 30 : 吸音材 幅 4.0 [m] 吸音率 0.75

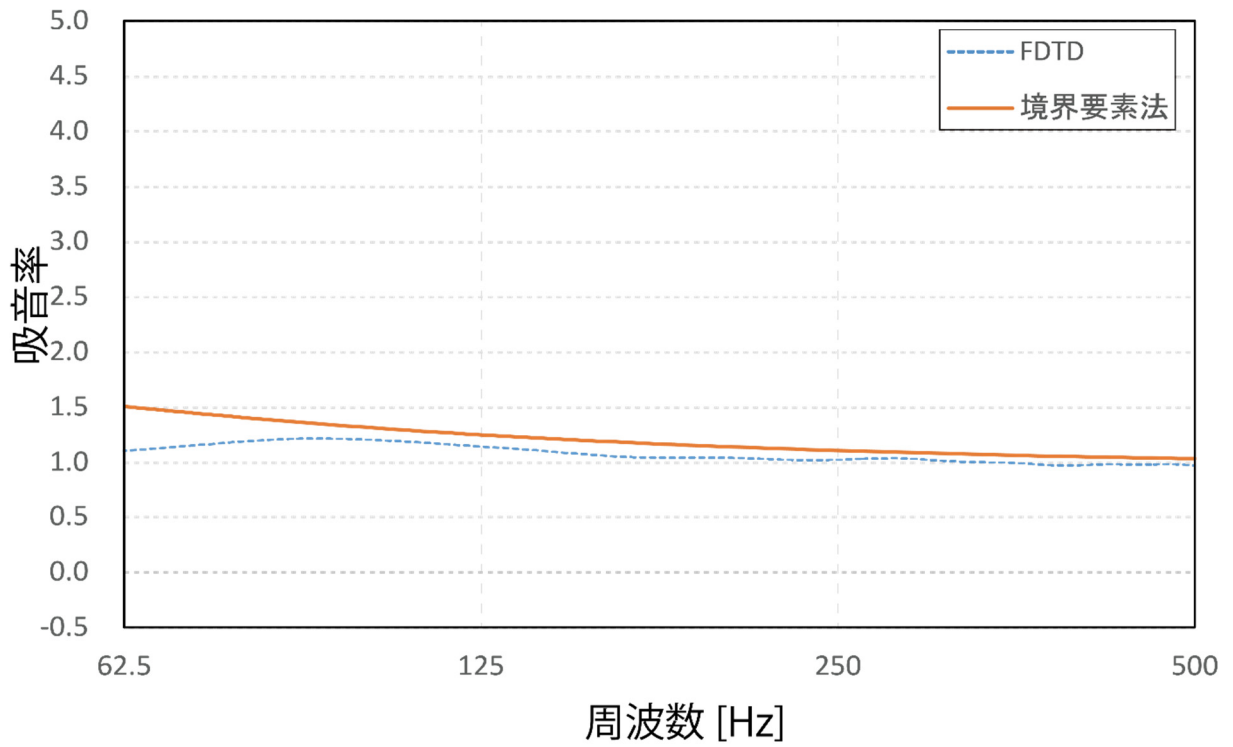


图 31 : 吸音材 幅 4.0 [m] 吸音率 1.00

4 考察

図7~31に見られるように、FDTD法のすべてのグラフが正弦波の様な波打つ形をしており、境界要素法は波打つことなく曲線を描いている。また、FDTD法による乱入射吸音率の算出の結果をみると、境界要素法との値の乖離が大きいのは吸音率が1などの高い場合、面積が小さい場合、周波数が低い場合である。これらはすべて面積効果が顕著に現れる条件と一致している。なお、面積効果が顕著に現れる要因は、吸音材の面積が小さいほど見かけの入射エネルギーと実際に吸音材に流入するエネルギーの比が大きくなること、吸音率が高いほど周囲との音圧差が大きくなり吸音材への周囲からの流入が増えること、また、周波数が低いほど音波が回折しやすく吸音材への周囲からの流入が増えることの3つである。以上より、FDTD法による乱入射吸音率の算定では面積効果による影響を十分に考慮できていないと考えられる。本研究では時間応答波形を見て入射波と反射波を分離しているが、二次元解析を採用したため、入射波が完全に収束する前に反射波が受信点に到達する。そのため、入射波と反射波を正確に分離する事が不可能であったことが上述したグラフの波うちや境界要素法との乖離の原因だと推察される。

5 おわりに

FDTD法を用いて乱入射吸音率を求めることを目標として(A)と(B)二つの解析場から見かけの入射エネルギー、及び、入射波と反射波から求められる吸音材によって消費されるエネルギーの二つのエネルギーを算出し、それらから求めた乱入射吸音率を境界要素法による値と比較した。その結果、両者は比較的近い値をとったが、FDTD法では面積効果の影響を十分に考慮できていないことが示唆された。これを改善するには、本論文で採用した二次元解析から三次元解析へと移行し、入射波と反射波をより正確に分離する必要があると考えられる。

また、本研究では対象周波数を62.5~500 [Hz]としたが、今後の研究では人間の可聴域である。20~20,000 [Hz]まで対応できるよう、より細かい空間離散化幅で計算を行うことが望まれる。

参考文献

- [1] 米澤暢洋 : 「エッジ効果抑制型拡散吸音体の開発」 関西大学卒業論文 2016
- [2] K.S.Yee : Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, IEEE Trans. Antennas Propag.,AP-14,pp.302-307(1966)
- [3] 豊田政弘 : 「FDTD 法で視る音の世界」 コロナ社 2015

謝辞

本研究を進めるに当たりご多忙であるにも関わらずご指導ご鞭撻を賜りました指導教員の豊田政弘准教授に心より御礼を申し上げます。

また一年間を共に過ごし、研究に多大な影響を与えてくれた音ゼミの皆様にも深く感謝します。