

# 連成 FDTD 法における汎用的な境界条件の研究

関西大学大学院 理工学研究科  
ソーシャルデザイン専攻 建築学分野  
13M6422 石川 翔一郎  
指導教員： \_\_\_\_\_ 印

## 【 論文要旨 】

時間と空間を離散化し、微分方程式の微分の部分を差分で近似する差分法の一つである時間領域有限差分法 (FDTD 法) において、ある境界に到達した音の反射特性を再現するために導入される条件として境界条件がある。解析対象の境界面に微細な凹凸が存在する場合、この凹凸まで考慮して空間離散化することは現実的ではないため、一般的な音場解析では凹凸が持つ吸音特性は複素表面インピーダンスという形で考慮される。しかし、時間領域である FDTD 法における音場解析では、周波数ごとの特性を考慮することが難しく、複素表面インピーダンスで示されるような位相遅れも直接導入することができないため、壁面材料の周波数特性を考慮するのが困難である。この解決策として、質点系を用いた表面吸音性のモデル化を応用した媒質間に質点系を挟むモデルが提案されている。質点系の 7 つのパラメータを調整することで、さまざまな吸音、及び、透過特性を考慮した汎用的な境界条件を構成できる。

本報では、振動音響連成 FDTD 法に吸音と透過の周波数特性を考慮できる汎用的な境界条件を導入することを念頭に、上述の質点系モデルを用いて所望の吸音と透過の周波数特性を模した場合の再現性について検討する。ここで、FDTD 法の安定条件として波動伝搬の安定条件の重要性はよく知られている。しかしながら、質点系モデルを用いた際、波動伝搬の安定条件を満たしているにも関わらず、パラメータによっては解が不安定となる場合がみられる。したがって、ここでは、FDTD 法における境界条件として質点系モデルを用いた場合の安定性に関する検討を行う。さらに、開発中の汎用振動音響連成 FDTD 法ソフトウェアに本報の内容を踏まえた質点系境界条件を実装する。

検討の結果、振動音響連成 FDTD 法に質点系境界を用いた場合、波動伝搬の安定条件に加えて、接する流体と質点系の連成系について安定条件を求め、双方の安定条件を満たすことで解の安定な解を得ることが可能となった。また、境界条件として媒質間に質点系でなく布などの他の構造物が挟まっているような場合についても、本報で示した手法と同様の方法で安定条件を導出することが可能であり、提案手法は安定条件を導出する汎用的な手法としても有用であると言える。また、汎用振動音響連成 FDTD 法ソフトウェアに質点系境界条件を実装し、質点系パラメータと安定条件の自動最適化を併せて用いることで、比較的容易にパラメータを決定でき、安定な解を得る解析が可能となった。

## 【 目次 】

1. はじめに	
1.1 研究背景 .....	1
1.2 既往研究	
1.2.1 質点系を用いた表面吸音性のモデル化について .....	2
1.2.2 質点系を用いた表面吸音性のモデル化の応用 .....	2
1.2.3 媒質間に質点系を挟むモデルについて .....	2
1.3 研究目的 .....	3
2. 媒質間に質点系を挟むモデル	
2.1 解析方法	
2.1.1 Miki モデルを用いた解析解 .....	4
2.1.2 質点系モデルの解析解 .....	6
2.1.3 質点系モデルの数値解 .....	7
2.1.4 条件設定 .....	8
2.2 結果 .....	10
2.3 考察 .....	15
3 剛壁に接する質点系モデルを用いた境界の安定条件について	
3.1 波動伝搬と一,二質点系部分の安定条件	
3.1.1 一次元における波動伝搬の安定条件 .....	17
3.1.2 一質点系部分の安定条件 .....	17
3.1.3 二質点系部分の安定条件 .....	19
3.1.4 条件設定 .....	20
3.1.5 結果 .....	21
3.1.6 考察 .....	24
3.2 連成系を用いた一,二質点系の安定条件	
3.2.1 一質点系の安定条件 .....	25
3.2.2 二質点系の安定条件 .....	27
3.2.3 条件設定 .....	28
3.2.4 結果 .....	29
3.2.5 考察 .....	32
4. 媒質間に質点系を挟むモデルを用いた境界の安定条件について	
4.1 一次元における三質点系の安定条件	

4.1.1 三質点系の安定条件 .....	33
4.1.2 条件設定 .....	35
4.1.3 結果 .....	36
4.1.4 考察 .....	38
4.2 三次元における三質点系の安定条件	
4.2.1 三次元における波動伝搬の安定条件 .....	39
4.2.2 条件設定 .....	40
4.2.3 結果 .....	41
4.2.4 考察 .....	43
4.3 三次元流体セルを用いた場合の安定条件	
4.3.1 三次元流体セルを用いた三質点系の安定条件 .....	44
4.3.2 条件設定 .....	46
4.3.3 結果 .....	47
4.3.4 考察 .....	49
5. 汎用ソフトウェアへの質点系境界条件の実装	
5.1 媒質間に質点系を挟むモデルの境界面への導入 .....	51
5.2 質点系パラメータの自動最適化 .....	53
5.3 安定条件の自動最適化 .....	54
6. おわりに .....	55

## 1. はじめに

### 1.1 研究背景

時間領域有限差分法 (FDTD 法) とは時空間を離散化し、微分方程式の微分の部分を差分で近似する差分法の一つである。元々は電磁場解析の手法であるが、様々な波動伝搬問題に展開が可能で建築音響にも応用できる。FDTD 法を用いて音場や振動場の解析をする際、空間をセルと呼ばれる微小体積に分割する。これを空間離散化と呼ぶ。

ある境界に到達した音の反射特性を再現するために導入される条件として境界条件がある。振動音響連成問題について、既報[1]では面に平行な方向の減衰 (= 面近傍の粘性表皮層内での粘性減衰) は考慮されているが、面に垂直な方向の減衰 (= 表面仕上げによる摩擦減衰) は考慮されておらず、固体面の振動速度とその面に接する流体の振動速度は等しいと仮定している。そのため、表面に細かな凹凸が存在する場合は、この凹凸についても上述の空間離散化を行う必要がある。しかしながら、計算機資源による限界があるので、細かな凹凸まで考慮して空間離散化することは現実的ではない。そこで、表面の細かな凹凸については、境界条件という形で任意の吸音、及び、透過特性を考慮できることが望ましい。

一般的な音場解析では、このような吸音特性は複素表面インピーダンス[2]という形で考慮されるが、時間領域解法である FDTD 法を用いた音場解析では、周波数ごとの特性を考慮することが難しい。また、実数のみを扱うので複素表面インピーダンスで表すような位相遅れを直接導入することはできない。さらに、インピーダンスを用いた表現は、一般的には解析対象空間への影響のみを評価する手法であるため、境界背後への影響については考慮できない。よって、振動音響連成問題を扱う FDTD 法においては、境界面に対して所望の吸音特性や透過特性を与えるために工夫が必要である。

## 1.2 既往研究

時間領域解法である FDTD 法を用いた音場解析では、周波数特性を考慮することが難しく、複素表面インピーダンスで表すような位相遅れを直接導入することはできない。また、振動音響連成を考える場合には、境界背後への影響について考慮する必要がある。これらの問題について、以下に示す通り、FDTD 法における境界面に対して所望の吸音や透過の周波数特性を再現することができる手法が提案されている。

### 1.2.1 質点系を用いた表面吸音性のモデル化について

FDTD 法を用いた音場解析では前述したように周波数特性を直接てきには再現できないため、質点系を用いた表面吸音性のモデル化が提案されている[3]。この手法では、質点系の応答を境界表面の音圧と粒子速度の関係に用いることで、時間領域解法における比較的複雑な表面吸音の周波数特性を再現している。しかしながら、解析対象空間への影響のみを評価する音場解析で用いられる手法であるため、振動音響連成解析にそのまま導入することはできない。

### 1.2.2 質点系を用いた表面吸音性のモデル化の応用

対象空間の背後への影響が考慮されない問題を解決する手法として、表面吸音性のモデル化を応用したモデルが提案されている[4]。この手法では、表面吸音性をモデル化した質点系が剛壁に接するようなモデルとなっており、質点系からその剛壁に加わる力を背後の壁に与えることで透過特性も考慮することができる。時間領域解析の比較的複雑な吸音、及び、透過特性を再現できるが、剛壁に対して質点系が接する側に音源がある場合しか対応できず、対称性がない。よって、反射特性と透過特性を再現できる境界条件ではあるものの汎用性については検討の余地がある。

### 1.2.3 媒質間に質点系を挟むモデルについて

前節で述べた汎用性の問題を踏まえ、既報[5]では、媒質と媒質の間に質点系を挟むようなモデルが提案されている。質点系の7つのパラメータを調整することで、さまざまな吸音、及び、透過特性を考慮できるので、対称性のある汎用的な境界条件を構成できる。しかしながら、FDTD 法への導入について言及されているものの実際に FDTD 法に導入した検討はなされていない。

### 1.3 研究目的

本報では、振動音響連成 FDTD 法に吸音と透過の周波数特性を考慮できる汎用的な境界条件を導入することを目的とする。初めに、振動音響連成 FDTD 法において媒質間に質点系を挟むモデルを用いて、目標とする吸音と透過の周波数特性を模した場合の、数値解析結果から導かれる周波数特性の目標値に対する再現性について検討する。また、質点系境界を振動音響連成問題に導入した際の問題点と解決策について述べる。さらに、汎用振動音響連成 FDTD 法ソフトウェアに本報の内容を踏まえた質点系境界条件を実装する。

## 2. 媒質間に質点系を挟むモデル

対象空間の背後への影響が考慮されない問題と汎用性の問題を踏まえ、媒質と媒質の間に質点系を挟むようなモデルが提案されている[5]。しかし、FDTD法への導入について言及されているものの、実際にFDTD法に導入した検討はなされていない。そこで、吸音材や板で構成された壁に平面波が入射する場合を対象として、解析解との比較から振動音響連成FDTD法で質点系モデルを用いた場合に目標とする周波数特性が再現されるかどうかを検討する。

### 2.1 解析方法

#### 2.1.1 Mikiモデルを用いた解析解

Fig. 1(上)のような系を考える場合、音圧を $p_{i,a,t}$ 、粒子速度を $v_{i,a,t}$ とおく。なお、下付きの添え字 $i, a, t$ はそれぞれ入射側、吸音材中、透過側を表す。また、時間項を $e^{-i\omega t}$ とし、未知数を $P^\pm$ とすると、音圧と粒子速度は以下のように表される。

$$p_i(x) = e^{ikx} + P_i^- e^{-ikx} \quad (1)$$

$$v_i(x) = \frac{1}{Z_0} (e^{ikx} - P_i^- e^{-ikx}) \quad (2)$$

$$p_a(x) = P_a^+ e^{ik_a x} + P_a^- e^{-ik_a x} \quad (3)$$

$$v_a(x) = \frac{-ik_a}{\gamma_a Z_a} (P_a^+ e^{ik_a x} - P_a^- e^{-ik_a x}) \quad (4)$$

$$p_t(x) = P_t^+ e^{ikx} \quad (5)$$

$$v_t(x) = \frac{1}{Z_0} P_t^+ e^{ikx} \quad (6)$$

ここで、 $i$ は虚数単位、 $\omega (= 2\pi f)$ は角周波数、 $f$ は周波数、 $t$ は時間、 $k, Z_0$ はそれぞれ空気中の音波の波数、特性インピーダンスである。また、 $k_a, \gamma_a, Z_a$ はそれぞれ吸音材中の音波の波数、伝搬定数、特性インピーダンスであり、 $k_a = i\gamma_a$ の関係が成り立つ。Mikiモデルでは、 $\gamma_a, Z_a$ は吸音材の流れ抵抗 $R$ を用いて次式で表される。

$$\gamma_a = k_0 \left[ 0.16 \left( \frac{R}{f} \right)^{0.618} - i \left\{ 1 + 0.109 \left( \frac{R}{f} \right)^{0.618} \right\} \right] \quad (7)$$



$$Z_a = Z_0 \left\{ 1 + 0.07 \left( \frac{R}{f} \right)^{0.632} + 0.107i \left( \frac{R}{f} \right)^{0.632} \right\} \quad (8)$$

また、 $z = -d, 0$ での境界条件は次式となる。

$$p_i(-d) = p_a(-d), v_i(-d) = v_a(-d) \quad (9)$$

$$p_a(0) = p_t(0), v_a(0) = v_t(0) \quad (10)$$

式(1)~(6)を式(9),(10)に代入し、連立方程式として解くことで、未知数 $P^\pm$ を求めることができる。この時、吸音率 $\alpha$ と透過損失 $R$ はそれぞれ次式で表される。

$$\alpha = 1 - |P_i^-|^2 \quad (11)$$

$$R = 10 \log_{10} \frac{1}{|P_t^+|^2} \quad (12)$$

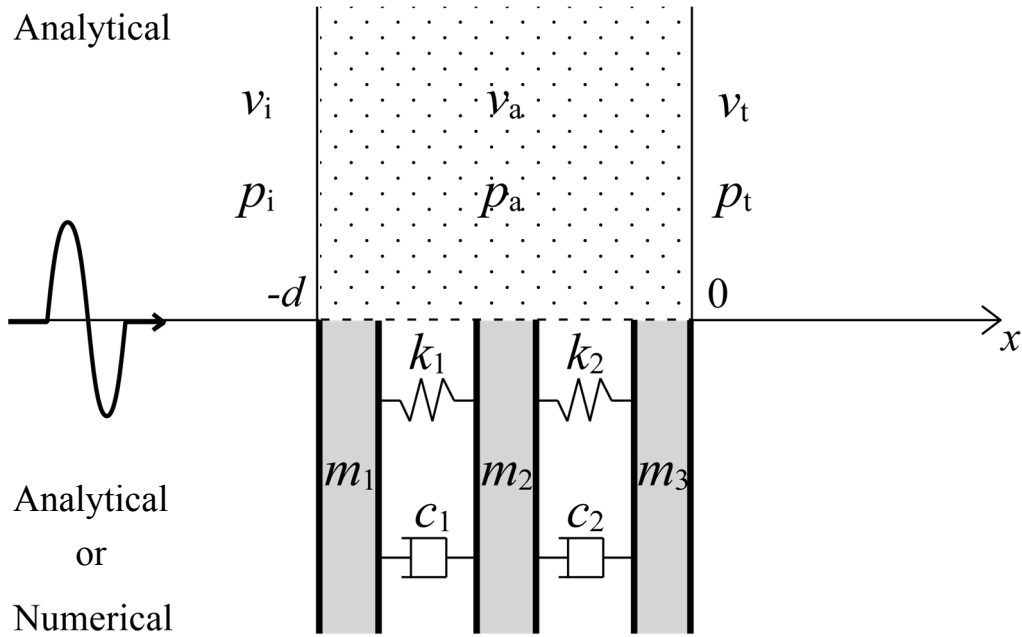


Fig. 1 三質点系の解析解と数値解モデル

### 2.1.2 質点系モデルの解析解

Fig. 1(上)のような系を質点系でモデル化する場合(Fig. 1(下))、 $m_{1,2,3}$ は面密度、 $x_{1,2,3}$ は変位、 $k_{1,2}$ 、 $c_{1,2}$ はそれぞれ単位面積当たりのばね定数、減衰定数である。それぞれの質点の運動方程式は次式で表される。

$$p_i(-d) = -m_1\omega^2 x_1 - i\omega c_1 + k_1(x_1 - x_2) \quad (13)$$

$$-i\omega c_1(x_1 - x_2) + k_1(x_1 - x_2) = -m_2\omega^2 x_2 - i\omega c_2 + (x_2 - x_3)k_2(x_2 - x_3) \quad (14)$$

$$-i\omega c_2(x_2 - x_3) + k_2(x_2 - x_3) = -i\omega m_3 + p_t(0) \quad (15)$$

また、音圧 $p$ 、粒子速度 $v$ については、式(1),(2),(5),(6)で表され、入射側と透過側の境界条件は次式で表される。

$$v_i(-d) = -i\omega x_1, \quad v_t(0) = -i\omega x_3 \quad (16)$$

式(1),(2),(5),(6)を式(13)~(16)に代入し、連立方程式として解くことで、未知数 $P^\pm$ を求めることができる。また、この時の吸音率 $\alpha$ と透過損失 $R$ は式(11),(12)で表される。

### 2.1.3 質点系モデルの数値解

Fig. 1 (下) のような質点系モデルについて、その質点系が表現する吸音率、及び、透過率の数解について考える。 $n$ を時間ステップ数、 $i$ を空間ステップ数として、式(13)~(15)について差分化するとそれぞれ以下ようになる。

$$p_{-d}^n = m_1 \frac{x_1^{n+1} - 2x_1^n + x_1^{n-1}}{\Delta t^2} + c_1 \frac{x_1^{n+1} - x_1^{n-1} - x_2^{n+1} + x_2^{n-1}}{2\Delta t} + k_1(x_1^n - x_2^n) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} c_1 \frac{x_1^{n+1} - x_1^{n-1} - x_2^{n+1} + x_2^{n-1}}{2\Delta t} + k_1(x_1^n - x_2^n) \\ = -m_2 \frac{x_2^{n+1} - 2x_2^n + x_2^{n-1}}{\Delta t^2} + c_2 \frac{x_2^{n+1} - x_2^{n-1} - x_3^{n+1} + x_3^{n-1}}{2\Delta t} + k_2(x_2^n - x_3^n) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -m_2 \frac{x_2^{n+1} - 2x_2^n + x_2^{n-1}}{\Delta t^2} + c_2 \frac{x_2^{n+1} - x_2^{n-1} - x_3^{n+1} + x_3^{n-1}}{2\Delta t} + k_2(x_2^n - x_3^n) \\ = m_3 \frac{x_3^{n+1} - 2x_3^n + x_3^{n-1}}{\Delta t^2} + p_0^n \end{aligned} \quad (19)$$

また、境界面上の粒子速度について、入射側を $v_L$ 、透過側を $v_R$ すると式(16)より、

$$v_L^{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_1^n}{\Delta t} \quad (20)$$

$$v_R^{n+1} = \frac{x_3^{n+1} - x_3^n}{\Delta t} \quad (21)$$

と表せる。式(17)~(19)より、新しい時間ステップの変位 $x_{1,2,3}$ についてそれぞれ求め、式(20),(21)に代入することで質点系境界の粒子速度を更新することができ、波動伝搬に関する FDTD 法の更新式と連成することで、任意の受音点の時間領域における音圧波形を求めることができる。また、入射音圧波形、反射音圧波形、透過音圧波形から吸音率、透過率を求めることができる。

#### 2.1.4 条件設定

Fig. 2 に示すような 4 つのモデルについて考える。Case1 の解析解は 2.1.1 節の吸音材として厚み 100 mm、流れ抵抗率  $10000 \text{ Ns/m}^4$  のグラスウールを想定し、Case2~4 の解析解については同様の吸音材と厚み 10 mm、体積密度  $600 \text{ kg/m}^3$  のベニヤ板を想定して 2.1.1 節と同様に解き、31.25~8000 Hz の吸音率、及び、透過損失による比較検討を行う。また、質点系を用いる場合、所望の特性を与えるべく  $m_{1,2,3}$ ,  $k_{1,2}$ ,  $c_{1,2}$  の 7 つのパラメータを調整することになる。Fig. 2 に示すような 4 つのモデルを想定し、それぞれのパラメータについて、Case1:  $m_1 = 0.001$ ,  $c_1 = 300$ ,  $k_1 = 3.0 \times 10^4$ ,  $m_2 = 0.07$ ,  $c_2 = 600$ ,  $k_2 = 5.0 \times 10^4$ ,  $m_3 = 0.001$ 、Case2:  $m_1 = 0.002$ ,  $c_1 = 600$ ,  $k_1 = 2.0 \times 10^6$ ,  $m_2 = 0.3$ ,  $c_2 = 1000$ ,  $k_2 = 6.0 \times 10^5$ ,  $m_3 = 6.0$ 、Case3:  $m_1 = 0.001$ ,  $c_1 = 300$ ,  $k_1 = 1.2 \times 10^6$ ,  $m_2 = 6.0$ ,  $c_2 = 5.0$ ,  $k_2 = 6.0 \times 10^5$ ,  $m_3 = 0.001$ 、Case4:  $m_1 = 6.0$ ,  $c_1 = 50$ ,  $k_1 = 2.2 \times 10^6$ ,  $m_2 = 0.002$ ,  $c_2 = 300$ ,  $k_2 = 2.0 \times 10^6$ ,  $m_3 = 6.0$  とする。これらのパラメータについては、2.1.1 節と 2.1.2 節の解析解の比較から試行錯誤により決定した。これらのパラメータを用い、4 つのモデルに平面波が入射する場合を対象として、数値解と解析解の吸音率、及び、透過損失についてそれぞれ比較検討する。ここで、空間分割幅  $\Delta x$  を 0.001 m、音速を 340 m/s、時間分割幅を  $\Delta t = 2.94117 \times 10^{-6}$  [5] とし、音源はガウシアンパルスとして、Fig. 3 に示すように質点系を用いた境界から 1500 mm 離れた場所に音源を入力し、受音点は質点系を用いた境界から透過側に 500 mm 離れた場所とした。

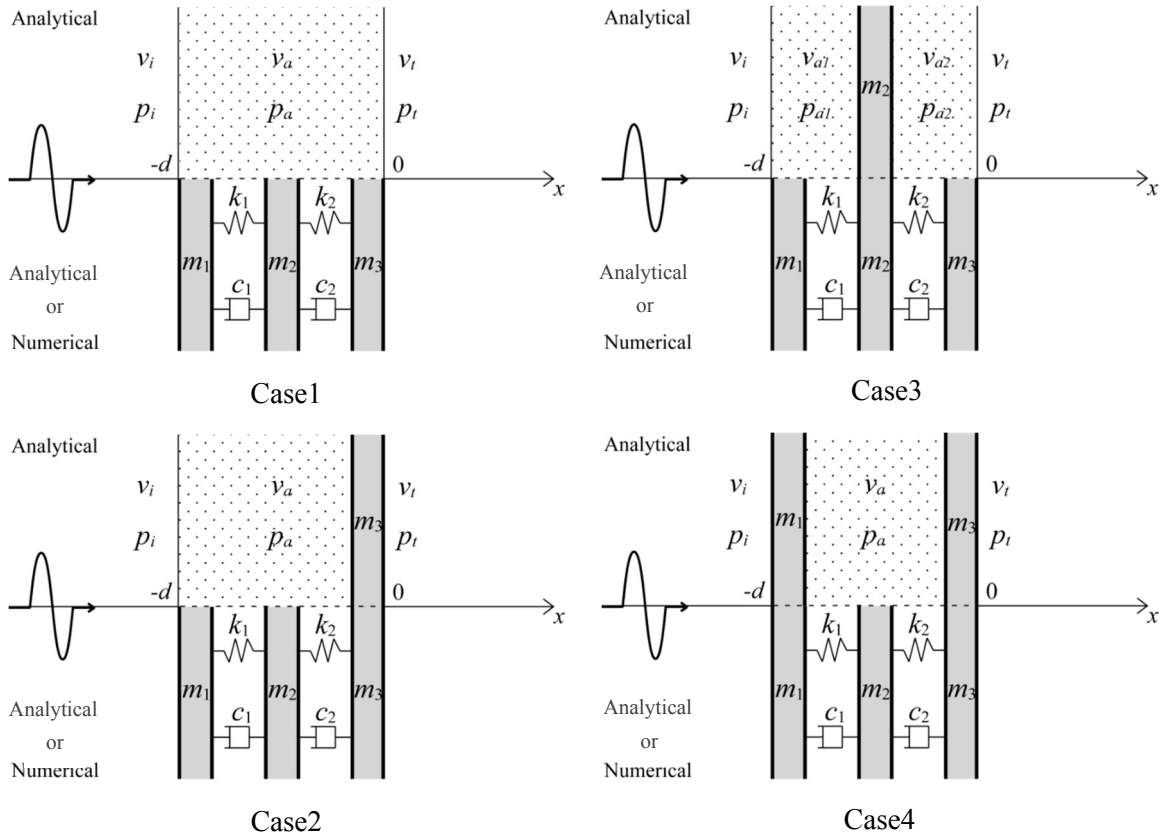


Fig. 2 質点系モデルによる再現例 (Case1~4)

*Transmission Mass-Spring-Dashpot Boundary*

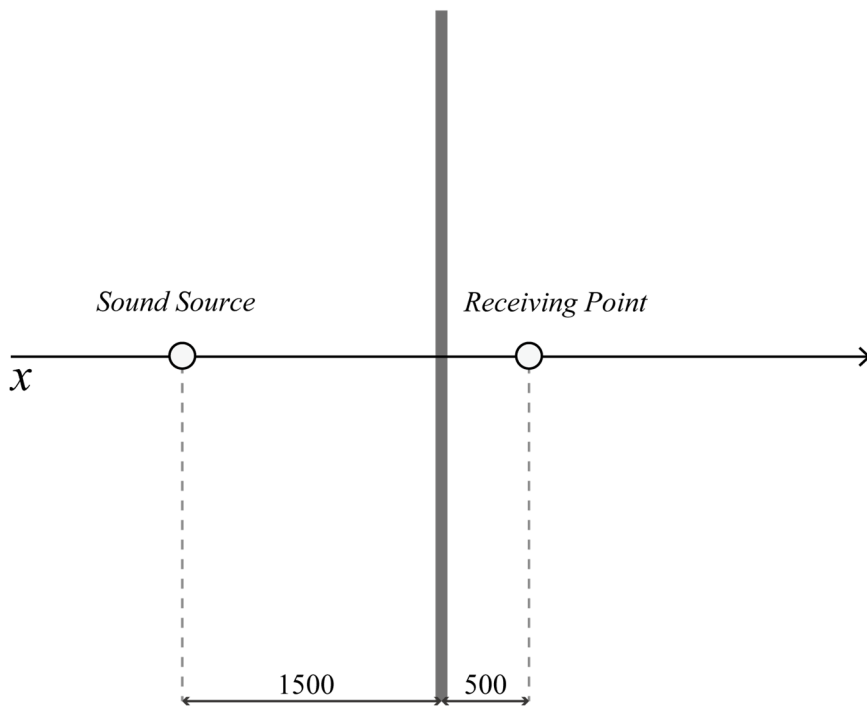


Fig. 3 媒質間に質点系を挟むモデルを用いた FDTD 法による解析

## 2.2 結果

吸音率、及び、透過損失について、数値解と解析解を比較した結果を Figs. 4~7 に示す。Case1~4 について、FDTD 法による数値解と解析解が等しいことがわかる。また、吸音率と透過損失の両者がある程度再現できており、パラメータ次第では FDTD 法による数値解を解析解へさらに近づけることが可能である。

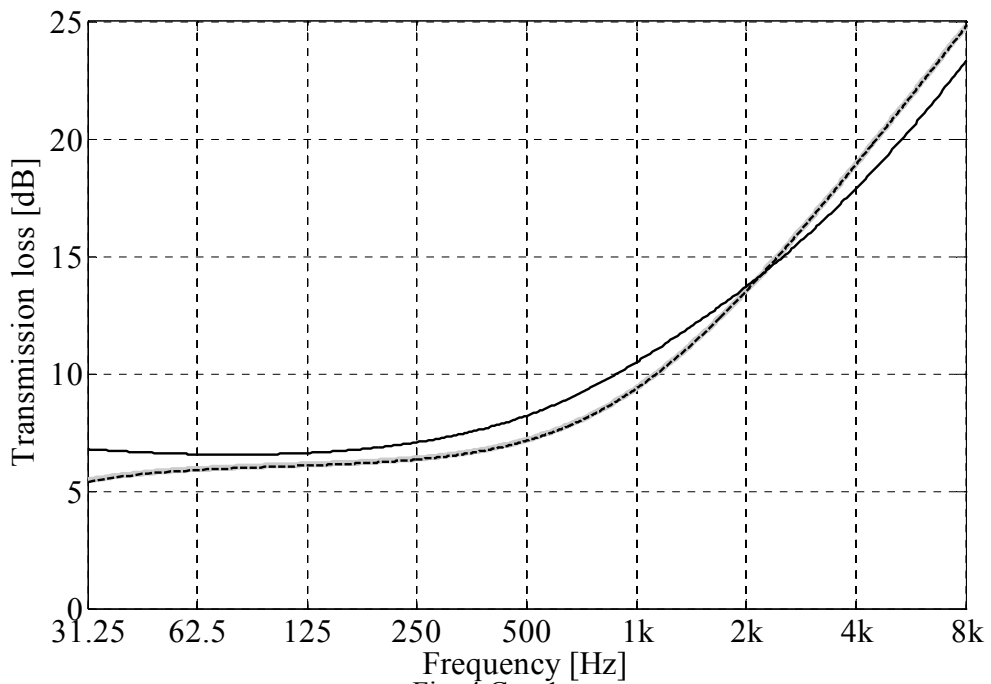
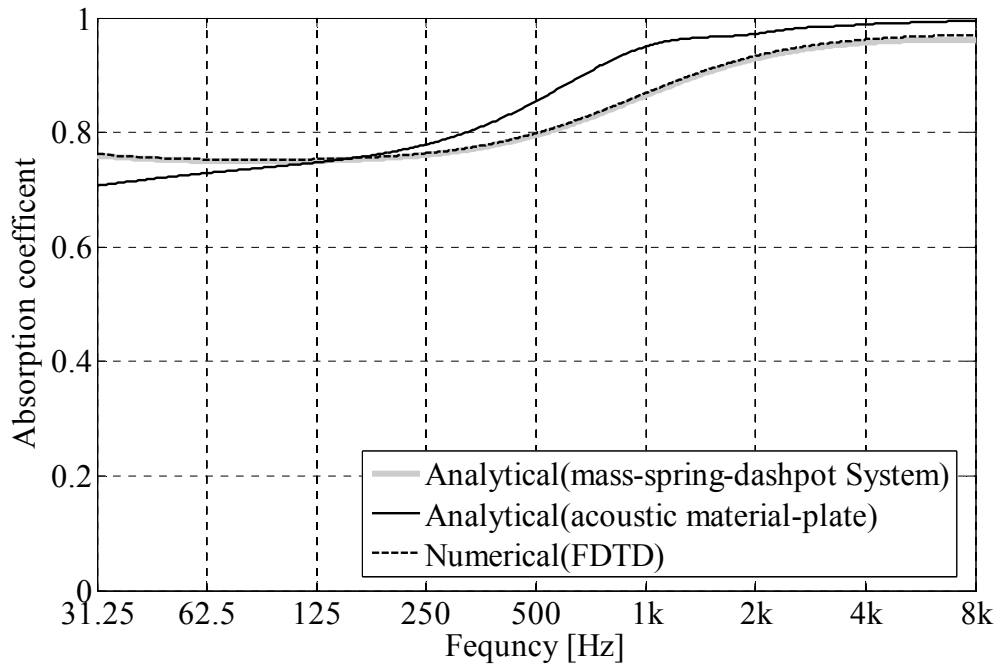


Fig. 4 Case1

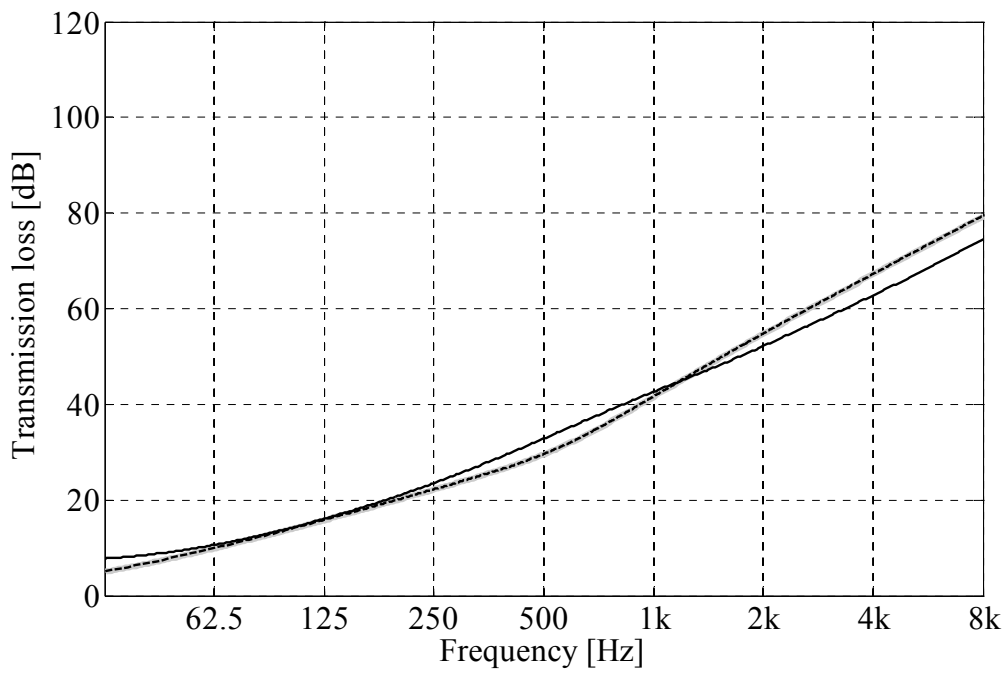
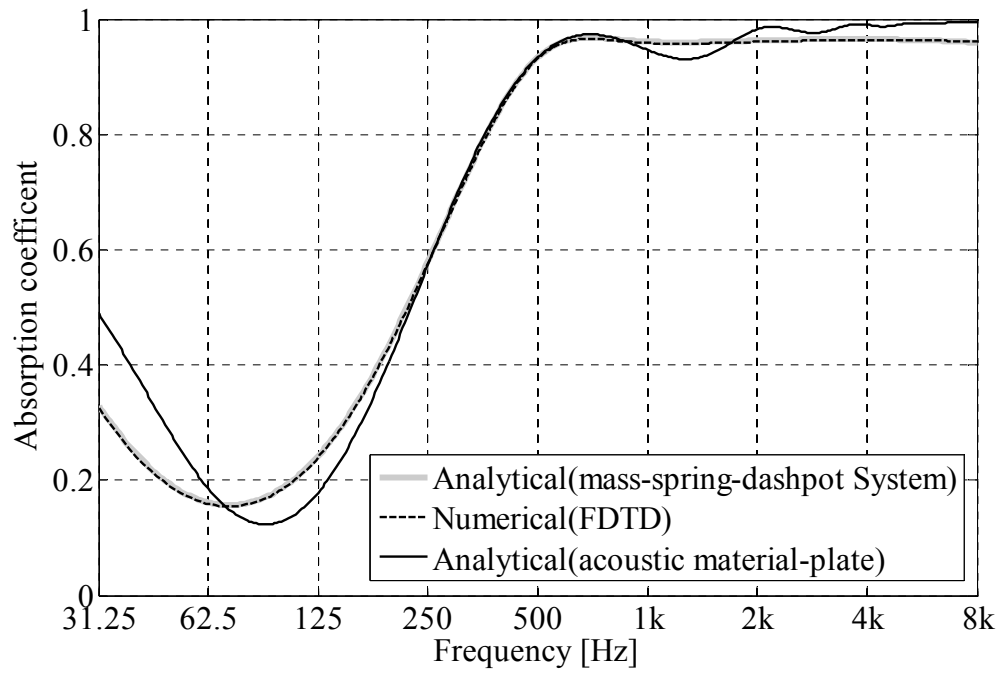


Fig. 5 Case2



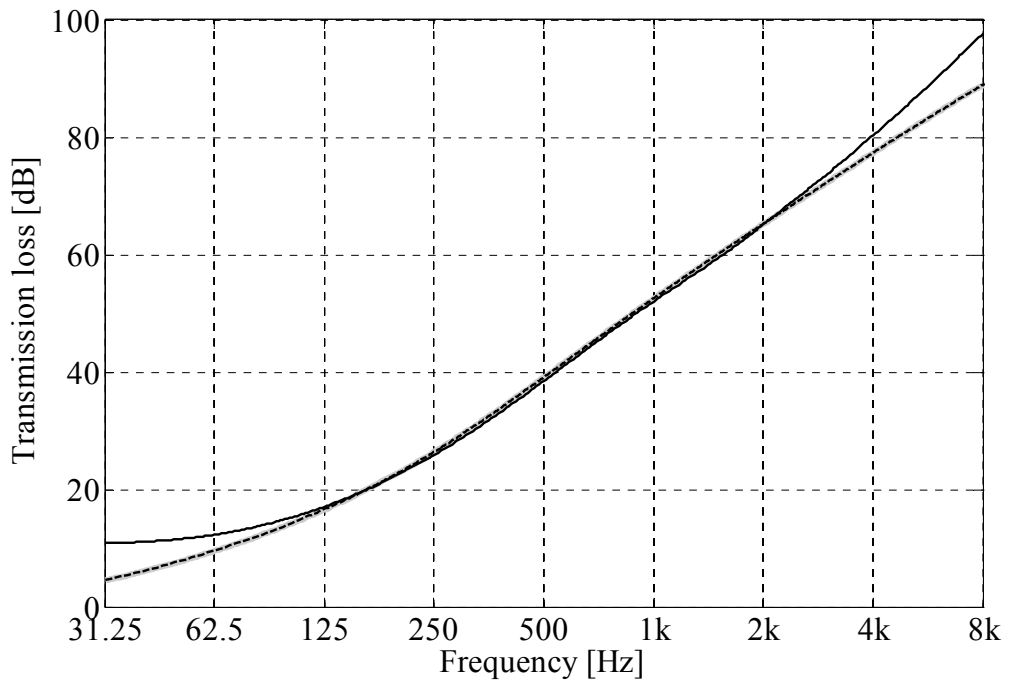
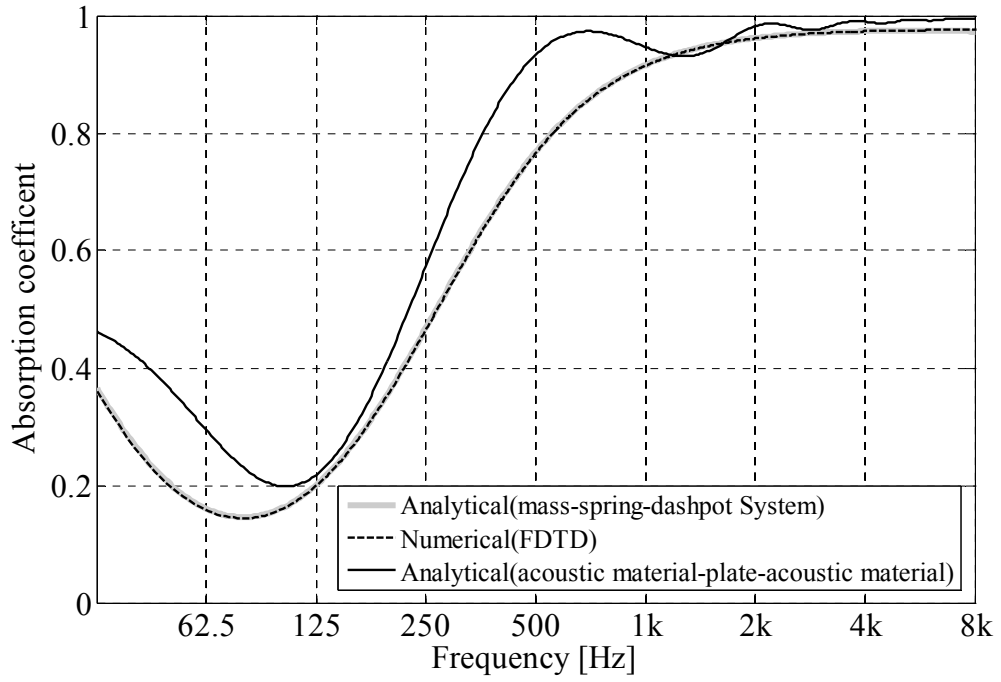


Fig. 6 Case3

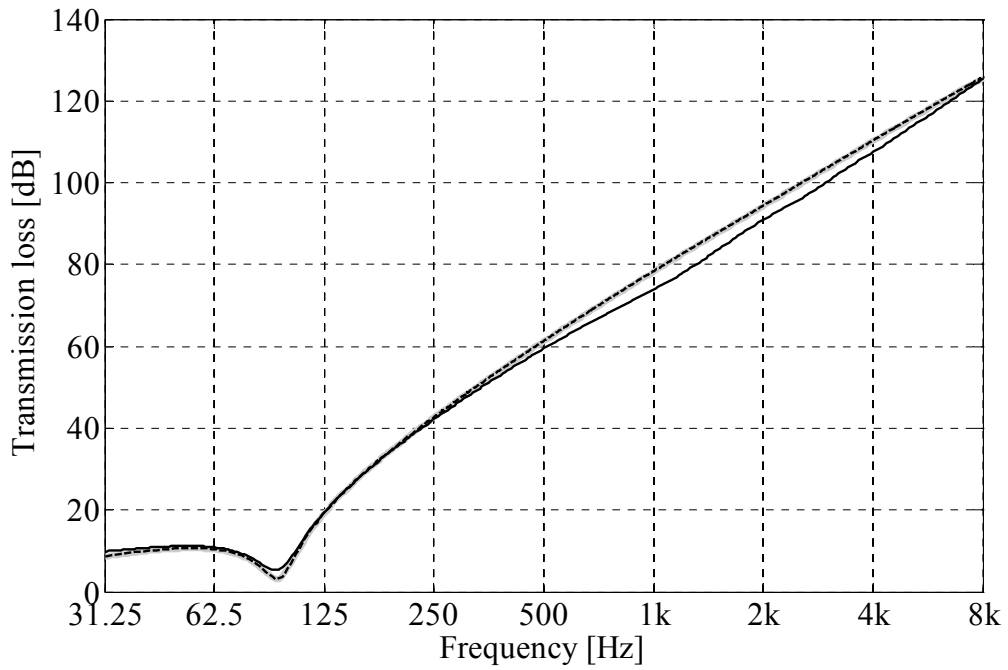
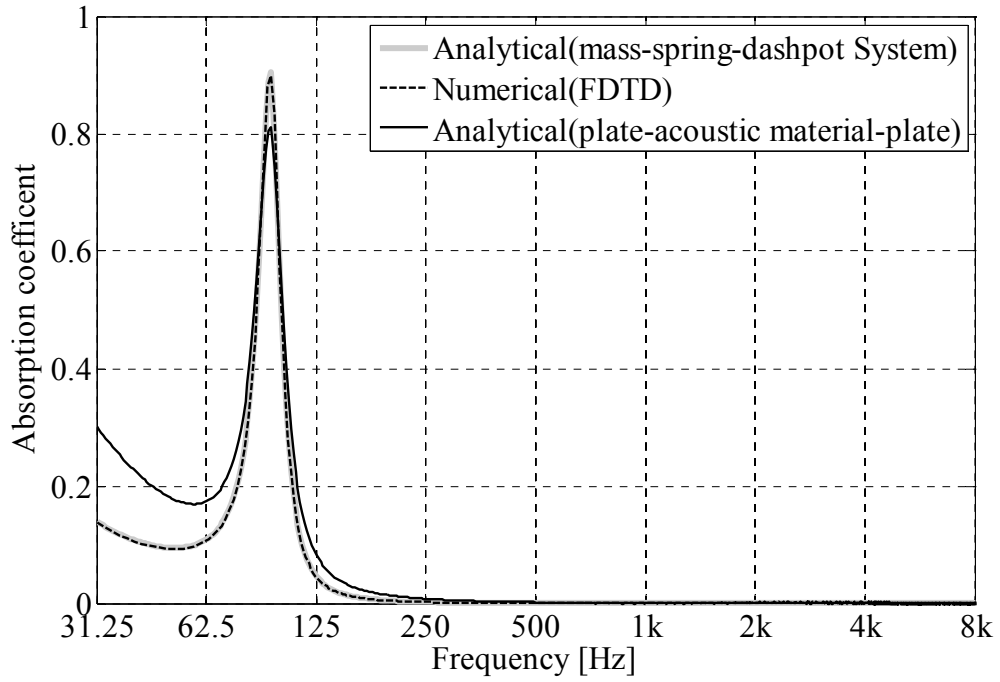


Fig. 7 Case4

### 2.3 考察

グラスウールやベニヤ板を想定した構造に平面波が入射する場合を対象として、解析解との比較から振動音響連成 FDTD 法で質点系モデルを用いた場合の再現性について、質点系を用いた手法は吸音率と透過損失の両者がある程度再現できており、汎用的な境界条件として FDTD 法へ導入できる可能性が示唆された。

ここで、FDTD 法の安定条件として、波動伝搬の安定条件の重要性はよく知られており、一次元の波動伝搬の安定条件は、音速を  $c_0$ 、空間離散化幅を  $\Delta x$ 、時間分割幅を  $\Delta t$  とすると以下のように表せる。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_0} \quad (22)$$

この関係を満たすことで安定な解を得ることができ、本節においてもこの安定条件を考慮して解析を行った。前節と同様に時間領域解析における周波数特性の再現性について、質点系モデルのパラメータを  $m_1 = 0.002$ ,  $c_1 = 600$ ,  $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ ,  $m_2 = 0.001$ ,  $c_2 = 1 \times 10^{-5}$ ,  $k_2 = 5 \times 10^4$ ,  $m_3 = 3.0 \times 10^6$  とした場合の透過側の音圧と時間軸の関係を Fig. 8 に示す。本来であれば Fig. 9 に示すように透過後の振幅が徐々に減衰してゆくはずである。しかし、値が発散しているため、非常に大きな値が表示されずにグラフが途中で切れている。このように、式(22)の安定条件を考慮して解析を行ったにも関わらず、パラメータの組合せによっては解が不安定となる場合が多々みられた。したがって、FDTD 法において質点系モデル[3][5][6]を用いた解析を安定に行うためには、新たな安定条件を導出する必要がある。

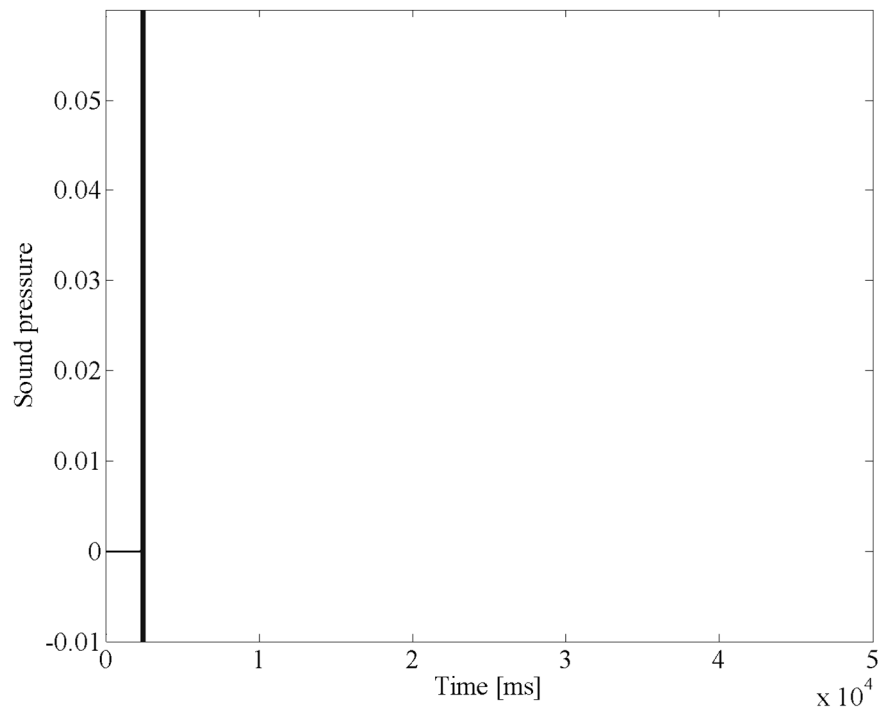


Fig. 8 不安定な場合

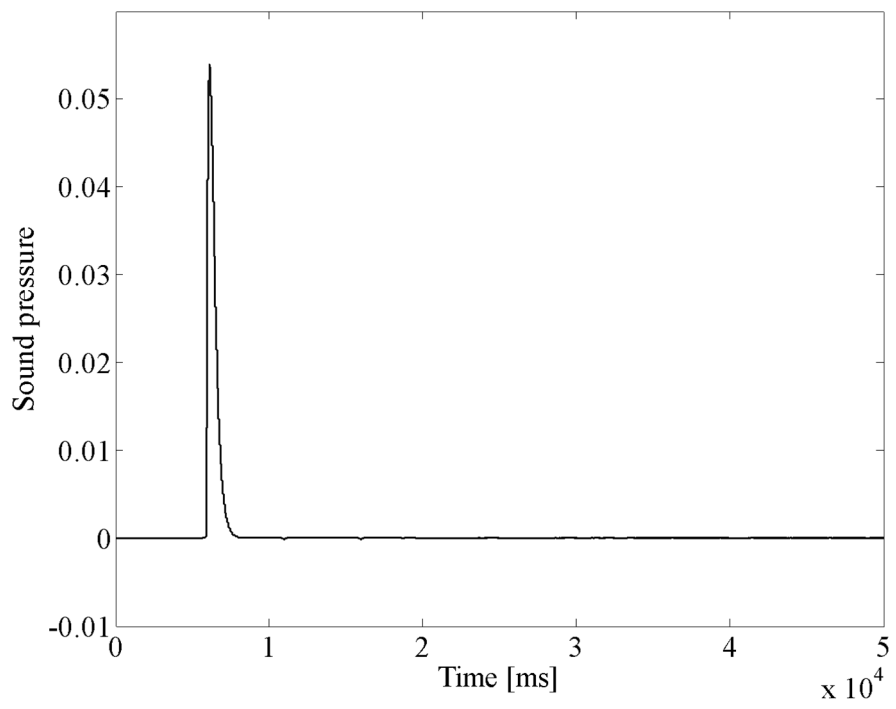


Fig. 9 安定の場合

### 3 剛壁に接する質点系モデルを用いた境界の安定条件について

質点系モデルを用いた場合、波動伝搬の安定条件を満たしているにも関わらず、パラメータによっては解が不安定となる場合がみられる。本章では、質点系モデルを用いた FDTD 解析[3]において、安定な解を得ることを目的として、一質点系、及び、二質点系モデルを用いた境界の安定条件について検討する。

#### 3.1 波動伝搬と一、二質点系部分の安定条件

##### 3.1.1 一次元における波動伝搬の安定条件

一次元での波動伝搬の安定条件については式(22)で表すことができる。しかしながら、質点系を用いた境界条件において、波動伝搬の安定条件を満たしているにも関わらず不安定であるならば、質点系部分の安定性に問題があるはずである。つまり、質点系部分の安定条件を考慮する必要があると考えられる。

##### 3.1.2 一質点系部分の安定条件

Fig. 10 に示すような一質点の同次運動方程式は次式で表される。

$$0 = m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + k_1 x_1 \quad (23)$$

ここで、 $x_1$ は変位、 $m_1, k_1, c_1$ はそれぞれ単位面積当たりの質量、ばね定数、減衰定数である。このような系において、時間ステップが $n$ の変位を $x^n$ として式(23)を差分近似し、状態遷移方程式をつくると次式で表される。

$$\begin{bmatrix} x^{n+1} \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{2m_1 - k_1 \Delta t^2}{2m_1 + c_1 \Delta t} & -\frac{2m_1 - c_1 \Delta t}{2m_1 + c_1 \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ x^{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

この系が安定となるためには右辺の行列の全ての固有値の絶対値が 1 以下となればよいので、時間分割幅 $\Delta t$  (以降、 $\Delta t$ とする)について整理すると次式の関係が得られる。

$$\Delta t < 2 \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad (25)$$

よって、質点系部分が安定となるためには、式(25)を満たすような $\Delta t$ を定めればよい。また、式(25)より、減衰定数 $c_1$ は安定性に影響しないことがわかる。したがって、以降ダッシュポットを無視する。

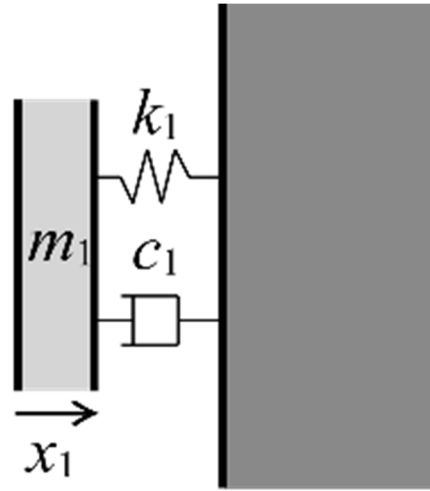


Fig. 10 一質点系モデル

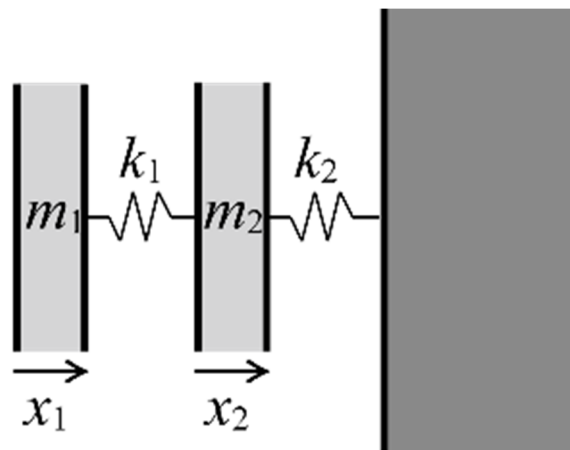


Fig. 11 二質点系モデル

### 3.1.3 二質点系部分の安定条件

次に Fig. 11 のような二質点系について考える。ここで、 $x_{1,2}$  を変位、 $m_{1,2}$  単位面積当たりの質量、 $k_{1,2}$  を単位面積当たりのばね定数、 $\varphi^\pm$  を固有モードとし、 $[x_1, x_2] = A^+ \varphi^+ + A^- \varphi^-$  とおけば、同次の運動方程式は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{m}^+ A^+ + \bar{k}^+ A^+ = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{m}^- A^- + \bar{k}^- A^- = 0 \quad (27)$$

ここで、

$$\bar{k}^\pm = k_1(1 - q^\pm)^2 + k_2(q^\pm)^2 \quad (28)$$

$$\bar{m}^\pm = m_1 + m_2(q^\pm)^2 \quad (29)$$

$$q^\pm = 1 - \frac{m_1}{k_1}(\omega^\pm)^2 \quad (30)$$

$$(\omega^\pm)^2 = \frac{m_1(k_1 + k_2) + m_2 k_1}{2m_1 m_2} \pm \frac{\sqrt{\{m_1(k_1 + k_2) + m_2 k_1\}^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2} \quad (31)$$

であり、 $\omega^\pm$  は固有角波数である。式(26)、式(27)より、二質点系は 2 つの一質点系を重ね合わせた形で表現できることがわかる。以上より、一質点系の場合と同様にすれば、安定条件は次式で表せる。

$$\Delta t < \min \left( 2 \sqrt{\frac{\bar{m}^+}{\bar{k}^+}}, 2 \sqrt{\frac{\bar{m}^-}{\bar{k}^-}} \right) \quad (32)$$

### 3.1.4 条件設定

一質点系、及び、二質点系の安定条件として、波動伝搬の式(22)と、質点系部分のみの式(25)、及び、式(32)のうち、最も厳しい条件である $\Delta t$ を用いることで、波動伝搬と質点系部分の両方の安定な解を得ることができる。よって、以上の安定条件を用いた FDTD 法において、Fig. 10 や Fig. 12 に示すような質点系モデル（一質点系と二質点系）に平面波が入射する場合について解析を行なう。ここで音速 $c_0 = 343.5\text{m/s}$ 、空間離散化幅 $\Delta x = 0.001\text{m}$ とし、音源はガウシアンパルスとして、Fig. 12 に示すように質点系を用いた境界から 1500 mm 離れた場所に音源を入力し、受信点は質点系を用いた境界から 500 mm 離れた場所とした。

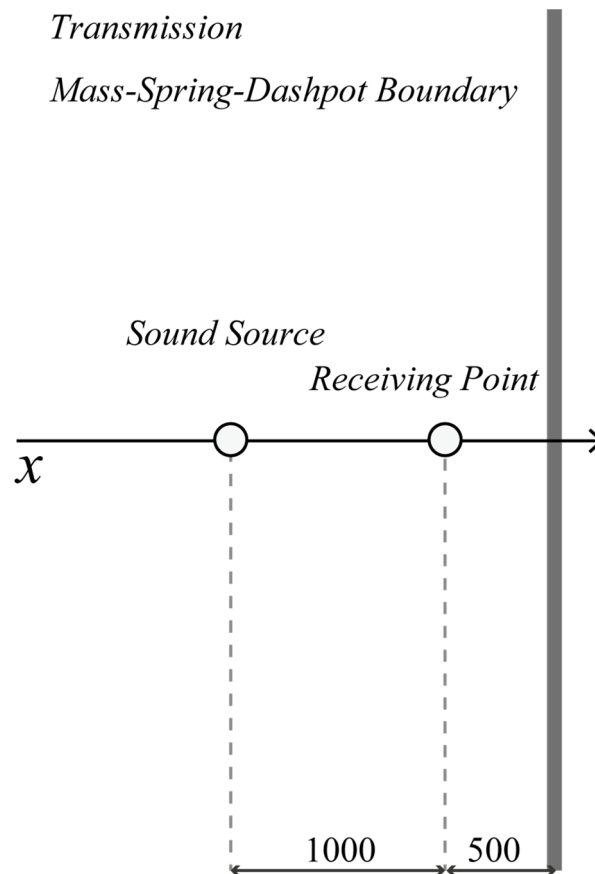


Fig. 12 一,二質点系モデルを用いた FDTD 法による解析



### 3.1.5 結果

一,二質点系に与えた質点系のパラメータ、それぞれの安定条件、及び、それぞれの安定条件を用いた解析結果について安定であれば、不安定であれば×として Tables 1,2 に示す。また、二質点系の Case2 の音圧と時間の関係を Fig. 13 に示す。前節と同様にグラフが途中で切れているが、本来であれば壁からの反射音が観測されるはずであり、解が発散していると考えられる。このように、双方の安定条件を満たしているにも関わらず、依然としてパラメータによっては不安定となり、正常な解析を行うことができない場合がみられた。

Table 1 一質点系による安定性

Parameters			
	$m_1$	$c_1$	$k_1$
Case1	4.40E+3	5	8.70E-2
Case2	6.00E-10	8000	2200000

Stability conditions		
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only
Case1	<b>2.91E-06</b>	4.50E+02
Case2	2.91E-06	<u>1.04E-07</u>

The results		
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only
Case1	○	×
Case2	×	<u>×</u>

Table 2 二質点系による安定性

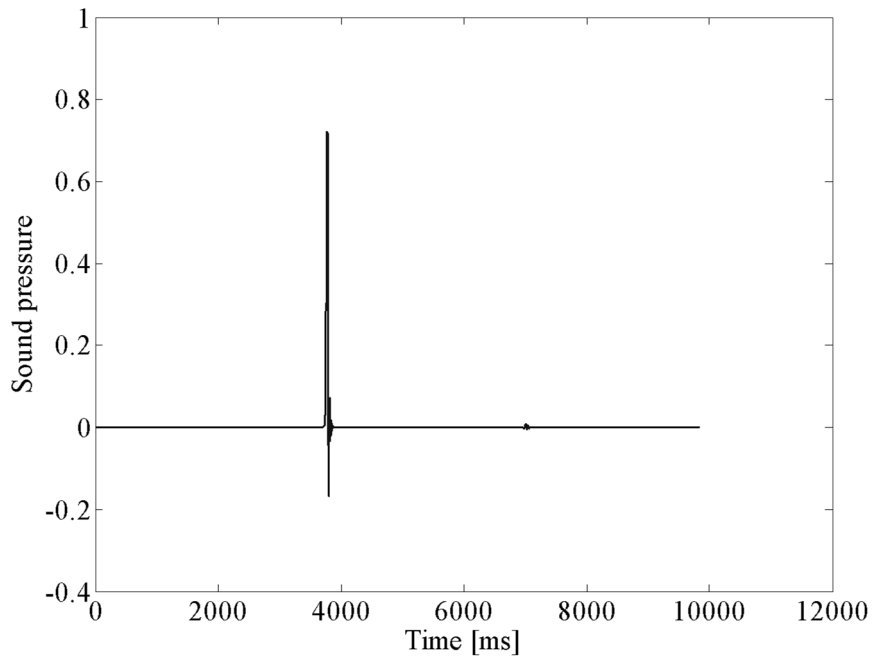
Parameters						
	$m_1$	$m_2$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
Case1	6.0	6.0	0	0	2.2E+6	2.2E+6
Case2	1.0E-3	1.00E+2	0	0	1.2E+9	1.0E+2

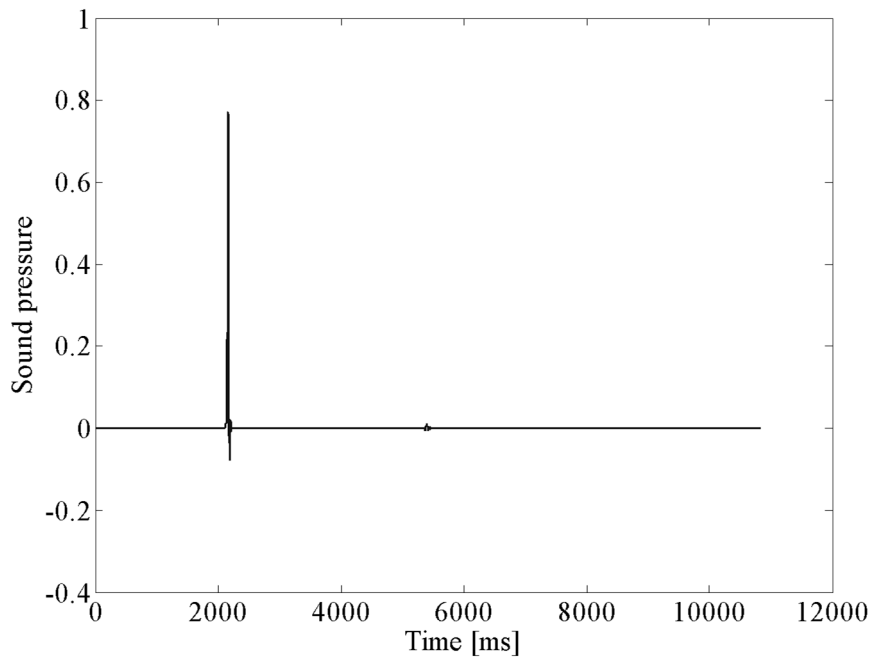
Stability conditions		
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only
Case1	<b>2.91E-06</b>	2.04E-03
Case2	2.91E-06	<u>1.82E-06</u>

The results		
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only
Case1	○	×
Case2	×	<u>×</u>



波動伝搬の安定条件を用いた場合



質点系部分の安定条件を用いた場合

Fig. 13 波動伝搬と質点系部分の安定性

### 3.1.6 考察

一,二質点系を用いた境界条件の安定条件について、波動伝搬の式(22)と質点系部分のみの式(25)、及び、式(32)を満たした $\Delta t$ を用いても、依然としてパラメータによっては不安定となり、正常に解析が行うことができない場合がみられた。よって、波動伝搬に加えて本章で導出した質点系部分を考慮した安定条件は、質点系モデル[3][5][6]を用いた境界の安定条件として十分であるとは言えない。

### 3.2 連成系を用いた一,二質点系の安定条件

ここで、振動音響連成問題において流体と質点系はそれぞれ単独で存在しておらず、流体は質点系に接した状態で存在している。質点系に対して流体自体が持つバネの役割を考慮するため、流体と質点系を合わせた連成系として安定条件を考える必要があると考えられる。そこで、質点系部分に流体セルを1つ加えたモデル(連成系)について考える。

#### 3.2.1 一質点系の安定条件

Fig. 15 に示すような一質点系について、変位を $x_1$ 、面密度を $m_1$ 、単位面積当たりのばね定数を $k_1$ 、流体セルの音圧を $p_1$ 、粒子速度を $v_{0,1}$ 、体積弾性率を $\kappa$ とし、質点系に接していない面に空気特性インピーダンス $Z_0$ を与えると次のような支配式と境界条件が得られる。

$$p_1 = m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + k_1 x_1 \quad (33)$$

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} \quad (34)$$

$$v_0 = -\frac{p_1}{Z_0} \quad (35)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x} \quad (36)$$

式(33)~(36)を差分近似し、状態遷移方程式をつくると、

$$\begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ x_1^{n+1} \\ x_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{\Delta t}{m_1} + \frac{1}{Z_0} \right) & -\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_1}{m_1} \Delta t \right) & \frac{\kappa}{\Delta x} \\ \frac{\Delta t^2}{m_2} & 2 - \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^n \\ x_1^n \\ x_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad (37)$$

となる。ここで、 $n$ は時間ステップ数を表す。この系が安定となるためには、右辺の行列の全ての固有値の絶対値が1以下となるような $\Delta t$ を定めればよい。

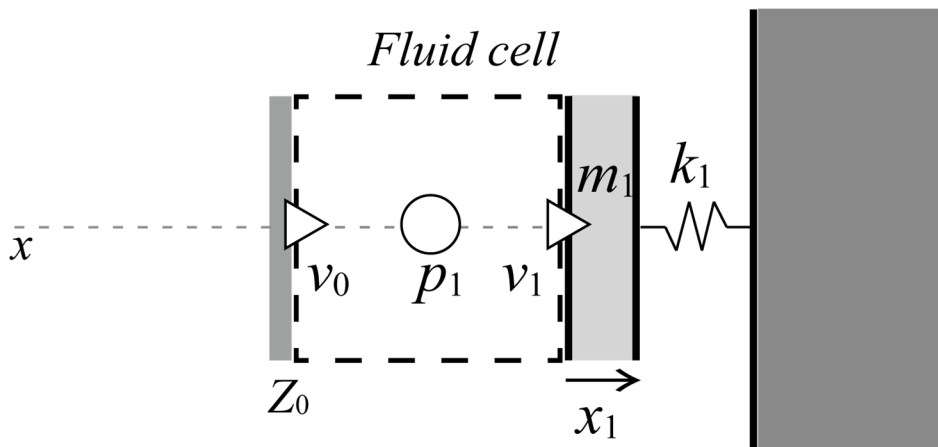


Fig. 15 連成系を用いた一質点系モデル

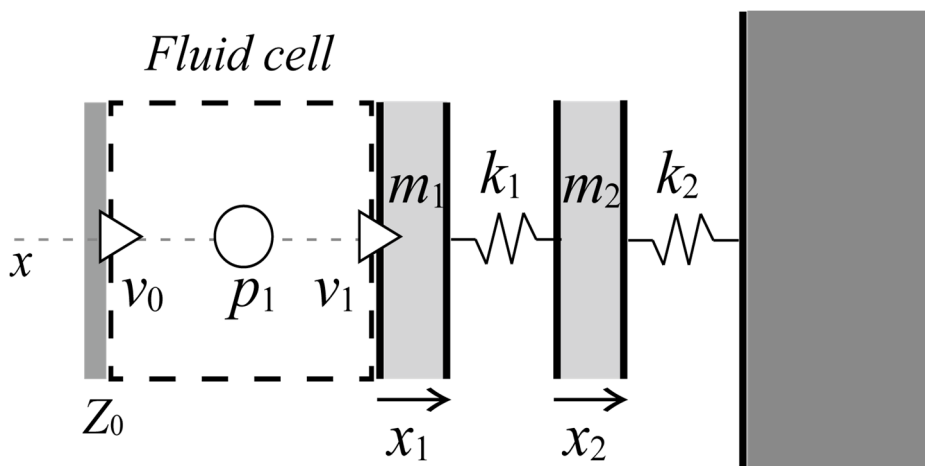


Fig. 14 連成系を用いた二質点系モデル

### 3.2.2 二質点系の安定条件

二質点系についても同様に、変位を $x_{1,2}$ 、面密度を $m_{1,2}$ 、単位面積当たりのばね定数を $k_{1,2}$ 、流体セルの音圧を $p_1$ 、粒子速度を $v_{0,1}$ 、体積弾性率を $\kappa$ として、質点系に接していない面に空気特性インピーダンス $Z_0$ を与えると次のような支配式と境界条件が得られる。

$$p_1 = m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + k_1(x_1 - x_2) \quad (38)$$

$$k_1(x_1 - x_2) = m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + k_2 x_2 \quad (39)$$

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} \quad (40)$$

$$v_0 = -\frac{p_1}{Z_0} \quad (41)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x} \quad (42)$$

一質点系と同様に、式(38)~(42)を差分近似し、状態遷移方程式をつくると、

$$\begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ x_1^{n+1} \\ x_1^n \\ x_2^{n+1} \\ x_2^n \\ x_2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{\Delta t}{m_1} + \frac{1}{Z_0} \right) & -\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_1}{m_1} \Delta t \right) & \frac{\kappa}{\Delta x} & -\kappa \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m_1} & 2 - \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & -1 & \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{m_2} \Delta t^2 & 0 & 2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} \Delta t^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^n \\ x_1^n \\ x_1^{n-1} \\ x_2^n \\ x_2^{n-1} \end{bmatrix} \quad (43)$$

となり、これらの系が安定となるためには、右辺の行列の全ての固有値の絶対値が 1 以下となるような $\Delta t$ を定めればよい。

### 3.2.3 条件設定

一質点系、及び、二質点系の安定条件として、波動伝搬の式(22)と、質点系部分のみの式(25),(32)に加えて、連成系の安定条件も考慮する。よって、以上の全ての安定条件を満たした $\Delta t$ を用いたFDTD法において、Fig. 12に示すような質点系モデルに平面波が入射する場合について解析を行う。ここで、 $\Delta t$ 以外の条件については前節と同様とした。



### 3.2.4 結果

連成系を考慮した一,二質点系について、質点系のパラメータ、それぞれの安定条件、及び、それぞれの安定条件を用いた解析結果について安定であれば、不安定であれば×として Tables 3,4 に示す。また、二質点系の Case2 の音圧と時間軸の関係を Fig. 16 に示す。一質点系について、波動伝搬の式(22)、質点系部分のみの式(25)、及び、Fig. 15 のような流体セルを加えたモデルの安定条件のうち、最も厳しい $\Delta t$ を安定条件として解析に用いることで、無作為に定めたパラメータを用いても値が発散せず安定であった。また、二質点系についても、波動伝搬の式(22)、質点系部分のみの式(32)、及び、Fig. 14 のような流体セルを加えたモデルの安定条件のうち、最も厳しい $\Delta t$ を安定条件として解析に用いることで解が安定であった。

Table 3 連成系を考慮した一質点系による安定性

Parameters			
	$m_1$	$c_1$	$k_1$
Case1	4.40E+3	5	8.70E-2
Case2	6.00E-10	8000	2200000

Stability conditions			
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only	Coupled System
Case1	<b>2.91E-06</b>	4.50E+02	5.82E-06
Case2	2.91E-06	<u>1.04E-07</u>	<b>4.10E-09</b>

The results			
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only	Coupled System
Case1	○	×	×
Case2	×	<u>×</u>	○

Table 4 連成系を考慮した二質点系による安定性

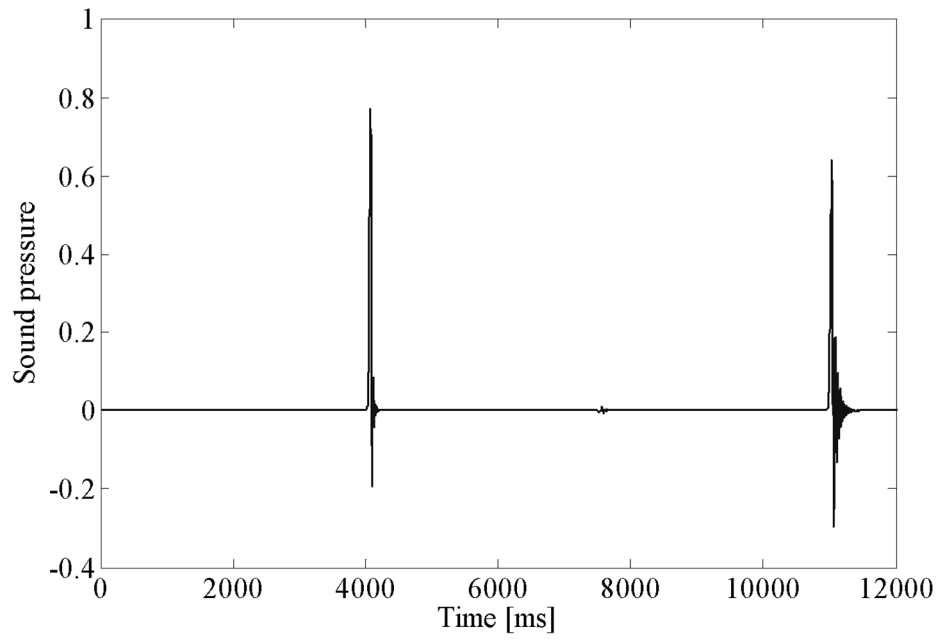
Parameters						
	$m_1$	$m_2$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
Case1	6.0	6.0	0	0	2.2E+6	2.2E+6
Case2	1.0E-3	1.00E+2	0	0	1.2E+9	1.0E+2

Stability conditions			
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only	Coupled System
Case1	<b>2.91E-06</b>	2.04E-03	5.88E-06
Case2	2.91E-06	<u>1.82E-06</u>	<b>1.69E-06</b>

The results			
	Air propagation	mass -spring-dashpot system only	Coupled System
Case1	○	×	×
Case2	×	<u>×</u>	○



連成系の安定条件を用いた場合

Fig. 16 連成系を考慮した場合の安定性

### 3.2.5 考察

一,二質点系を用いた境界条件の安定条件において、波動伝搬の式(22)と、式(33)~(36)、及び、式(38)~(42)からなる連成系から導かれる安定条件を満たした $\Delta t$ を用いることで、剛壁に接する質点系モデル[3]を用いた解析において安定な解を得ることができた。

質点系パラメータの組み合わせについて前節で述べたパターン以外も検討したが、質点系部分のみの式(25), (32) による安定条件が最も厳しくなるような場合は見られなかった。波動伝搬もしくは、連成系の安定条件が優勢であることから、質点系部分のみよりも連成系の安定条件の方が厳しいと考えられる。したがって、これ以降、質点系部分のみの安定条件については省略し、波動伝搬と連成系の安定条件を用いて検討する。

#### 4. 媒質間に質点系を挟むモデルを用いた境界の安定条件について

流体セルと質点系を合わせた連成系を考慮した安定条件を導出することで、剛壁に接する質点系モデル[3]を用いた解析においても安定な解を得られることが前節にて明らかとなった。本章では、反射と透過の両方を考慮することが可能である Fig. 1 に示すような質点系を媒質間に挟むモデル[5][6]を用いた境界の安定条件について検討する。

#### 4.1 一次元における三質点系の安定条件

##### 4.1.1 三質点系の安定条件

ここで、質点系部分の両端に流体セルを 1 セルずつ加えた Fig. 17 のようなモデル (連成系) を考える。この三質点系について、面密度を  $m_{1,2,3}$ 、変位を  $x_{1,2,3}$ 、単位面積当たりのばね定数を  $k_{1,2}$ 、流体セルの音圧を  $p_{1,2}$ 、粒子速度を  $v_{0,1,2,3}$ 、体積弾性率を  $\kappa$  とし、両端に流体セルの特性インピーダンス  $Z_0$  を与えると次のような支配式と境界条件が得られる。

$$p_1 = m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + k_1(x_1 - x_2) \quad (44)$$

$$k_1(x_1 - x_2) = m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + k_2(x_2 - x_3) \quad (45)$$

$$k_2(x_2 - x_3) = m_3 \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + p_2 \quad (46)$$

$$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial x_3}{\partial t} \quad (47)$$

$$v_0 = -\frac{p_1}{Z_0}, \quad v_3 = \frac{p_2}{Z_0} \quad (48)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial v}{\partial x} \quad (49)$$

式(44) ~ (49)を差分近似し、状態遷移方程式をつくると、

$$\begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \\ x_1^{n+1} \\ x_1^n \\ x_2^{n+1} \\ x_2^n \\ x_3^{n+1} \\ x_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \left( \frac{\Delta t}{m_1} + \frac{1}{Z_0} \right) & 0 & -\kappa \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_1}{m_1} \Delta t \right) & \frac{\kappa}{\Delta x_1} & -\kappa \frac{\Delta t^2 k_1}{\Delta x_1 m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x_2} \left( \frac{\Delta t}{m_3} + \frac{1}{Z_0} \right) & 0 & 0 & \kappa \frac{\Delta t^2 k_2}{\Delta x_2 m_3} & 0 & \kappa \frac{\Delta t^2}{\Delta x_2} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_2}{m_3} \Delta t \right) & -\frac{\kappa}{\Delta x_2} \\ \frac{\Delta t^2}{m_1} & 0 & 2 - \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & -1 & \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_2} \Delta t^2 & 0 & 2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} \Delta t^2 & -1 & \frac{k_2}{m_2} \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta t^2}{m_3} & 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} \Delta t^2 & 0 & 2 - \frac{k_2}{m_3} \Delta t^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \\ x_1^n \\ x_1^{n-1} \\ x_2^n \\ x_2^{n-1} \\ x_3^n \\ x_3^{n-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

となり、これらの系が安定となるためには、右辺の行列の全ての固有値の絶対値が 1 以下となるように $\Delta t$ を定めればよい。

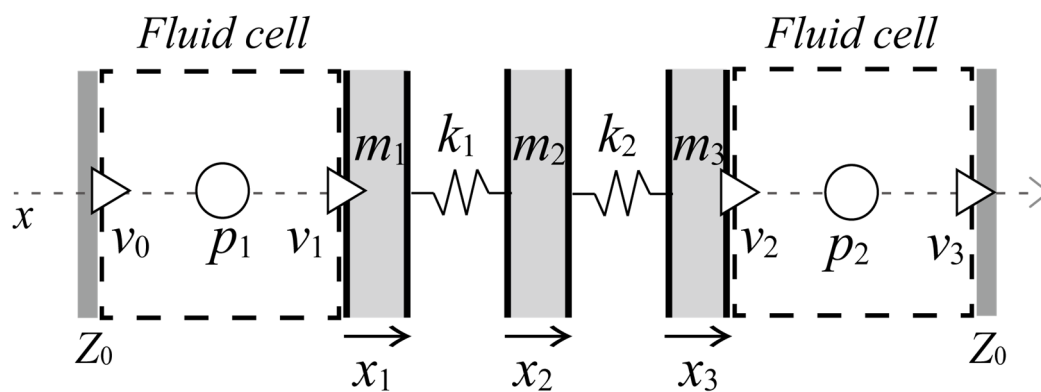


Fig. 17 連成系による三質点系モデル (一次元)

#### 4.1.2 条件設定

三質点系の安定条件として、波動伝搬の式(22)、及び、式(44)~(49)からなる連成系から導かれる安定条件のうち最も厳しい条件である $\Delta t$ を採用する。以上の安定条件を用いたFDTD法において、Fig. 1に示すような質点系モデル[5][6]に平面波が入射する場合の解析について Fig. 3と同様の条件で解析を行なう。

### 4.1.3 結果

連成系を考慮した三質点系について、質点系のパラメータ、それぞれの安定条件、及び、それぞれの安定条件を用いた解析結果について安定であれば、不安定であれば×として Table 5 に示す。また、Case2 の音圧と時間軸の関係を Fig. 18 に示す。結果として、波動伝搬の式(22)、及び、Fig. 17 のような流体セルを加えた連成系から導かれる安定条件のうち、最も厳しい $\Delta t$ を安定条件として用いることで、無作為に定めたパラメータを用いても、Fig. 18 に示すように値が発散せず正常な解析が行え、安定であった。

Table 5 連成系を考慮した三質点系による安定性（一次元）

Parameters							
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
Case1	1.0E-3	3.0E-1	6.0E-5	6.0E+2	1.0E-5	2.0E-6	3.0E+6
Case2	2.0E-3	3.0E-1	6.0E-5	6.0E+2	1.0E-5	2.0E-6	3.0E+6

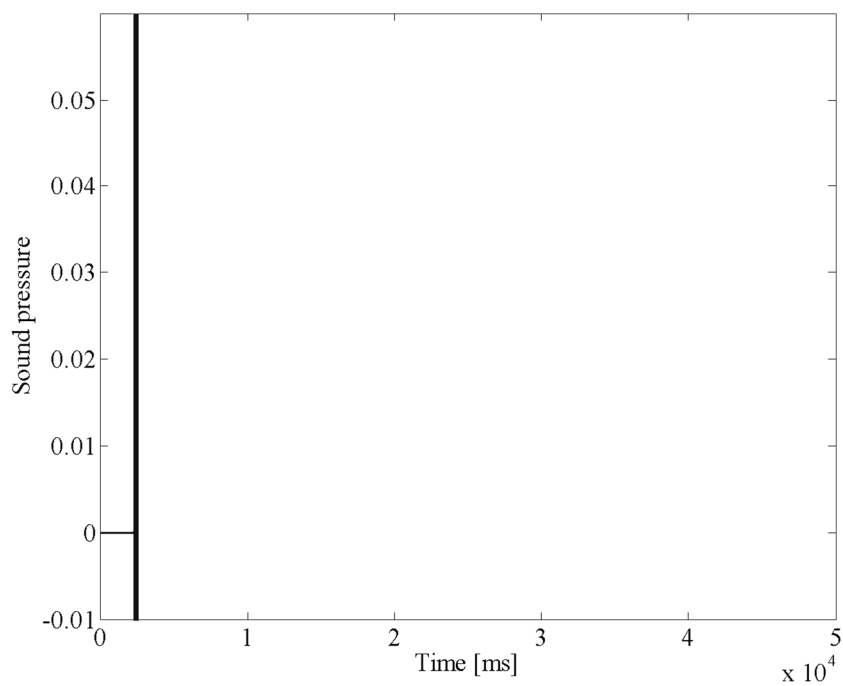
  

Stability conditions		
	Air propagation	Coupled System
Case1	<b>2.91E-06</b>	3.40E-06
Case2	2.91E-06	<b>1.15E-06</b>

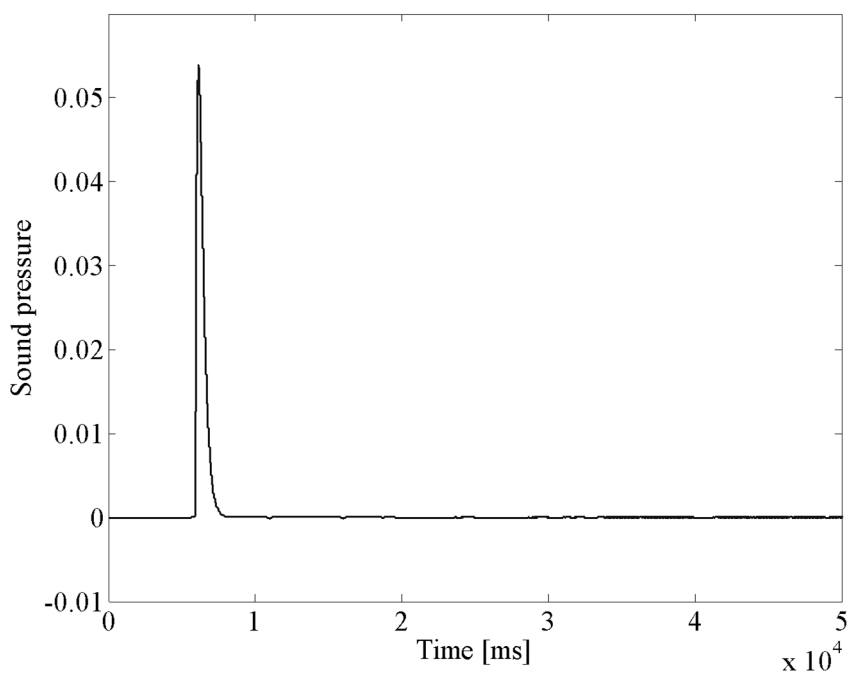
  

The results		
	Air propagation	Coupled System
Case1	○	×
Case2	×	○





波動伝搬の安定条件を用いた場合



連成系の安定条件を用いた場合

Fig. 18 波動伝搬と連成系の安定性

#### 4.1.4 考察

波動伝搬の式(22)と、式(44)～(49)からなる連成系から導かれる安定条件を満たした $\Delta t$ を用いることで、Fig. 1 に示すような質点系モデル[5][6]を用いた解析においても安定な解を得ることができた。よって、FDTD 法による次元解析において、媒質と媒質に質点系を挟むモデル[5][6]を用いた場合の安定条件を導出できたと言える。

## 4.2 三次元における三質点系の安定条件

これまでの一次元での解析、及び、検討より、連成系から導かれる安定条件の重要性が実証された。次に、媒質間に質点系を挟むモデル[5][6]を用いた境界条件を、三次元解析に用いた場合の安定条件について検討する。

### 4.2.1 三次元における波動伝搬の安定条件

波動伝搬の安定条件は、これまで一次元での検討であったため、式(22)に示すような関係であったが、三次元においてはこの限りではない。ここで、音速を $c_0$ 、空間離散化幅を $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 、時間分割幅を $\Delta t$ とすると、三次元での波動伝搬の関係は以下のように表すことができる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (51)$$

#### 4.2.2 条件設定

解析対象音場として Fig. 19 に示すような  $x = 1000$  mm、 $y = 700$  mm、 $z = 500$  mm の直方体内部を面で分断するような空間について考える。直方体を構成する面は固定境界とし、分断する面については Fig. 1 のような三質点系モデル化を用いた境界条件とする。音源はガウシアンパルスとして分断する面の中心から  $x$  方向に 200 mm 離れた位置とし、受信点は分断する面の中心から音源と逆方向に 200 mm 離れた位置とした。このときの安定条件として、波動伝搬の式(51)、及び、式(44)~(49)からなる連成系から導かれる安定条件のうち、最も厳しい安定条件を満たした  $\Delta t$  を用いて、FDTD 法による解析を行なった。ここで音速  $c_0 = 343.5$  m/s、各空間離散化幅  $\Delta x, \Delta y, \Delta z = 0.01$  m とし、直方体を分断する面の厚みは 0 とする。

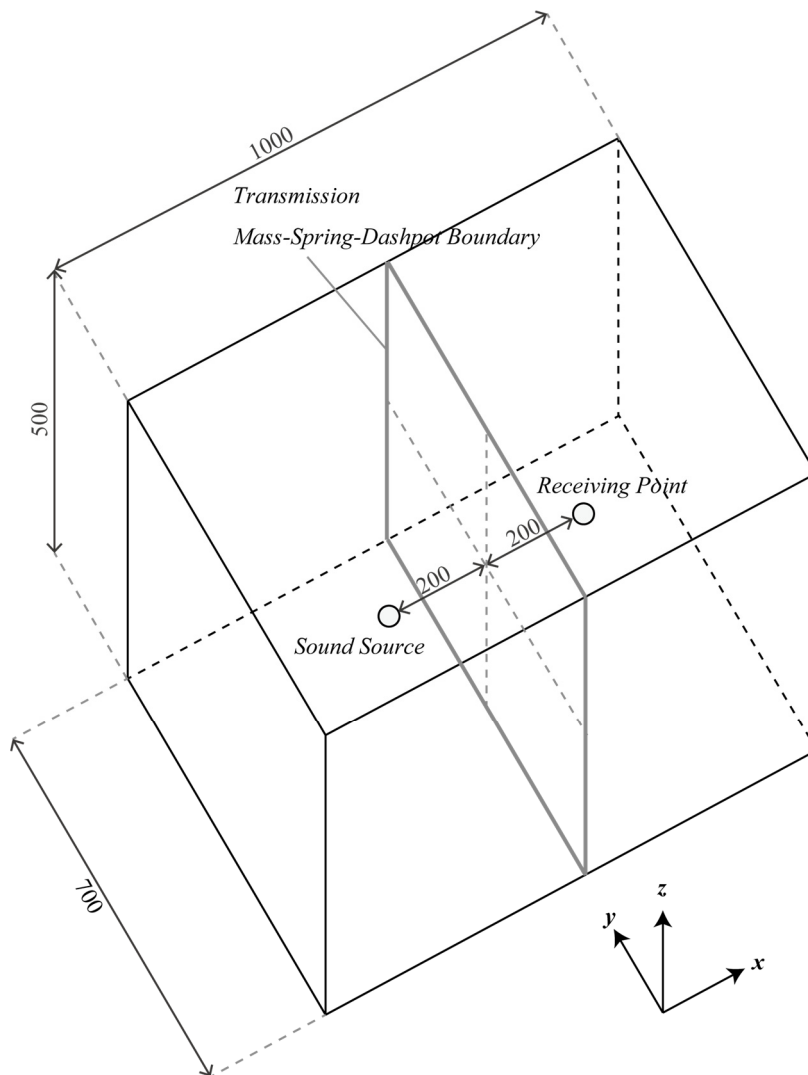


Fig. 19 質点系境界を用いた三次元解析モデル

### 4.2.3 結果

三次元解析での三質点系モデルについて、質点系のパラメータ、それぞれの安定条件、及び、それぞれの安定条件を用いた解析結果について安定であれば、不安定であれば×として Table 6 に示す。また、三質点系の Case2 の音圧と時間軸の関係を Fig. 20 に示す。本来であれば 2 章と同様に透過後の振幅が徐々に減衰してゆくはずであるが、グラフは途中で切れている。解が発散しており、グラフとして表示されていないものと考えられる。よって、双方の安定条件を満たしているにも関わらず、依然としてパラメータによっては Fig. 20 に示すように不安定となり、正常な解析を行うことができない場合がみられた。

Table 6 三質点系による安定性 (三次元)

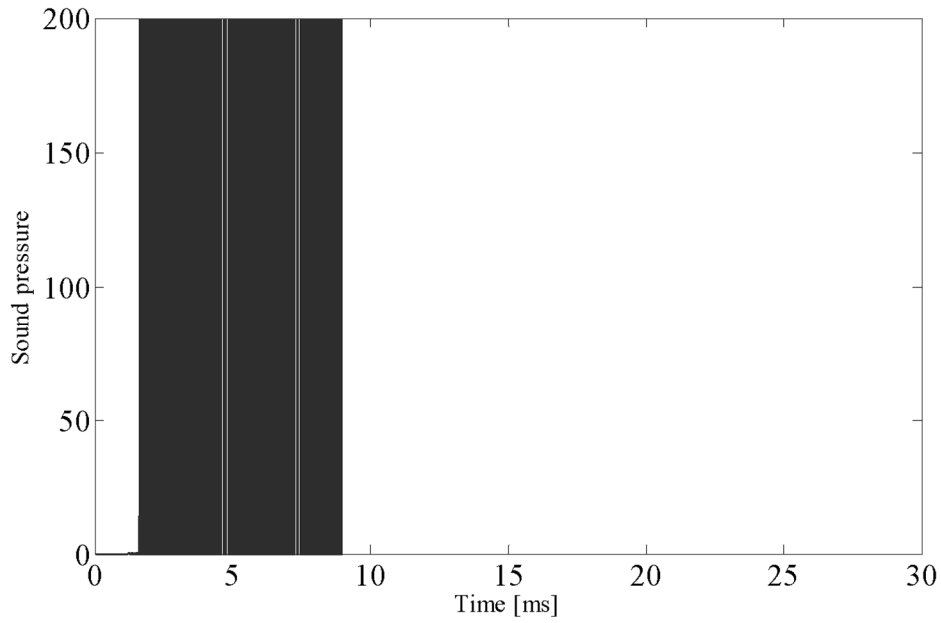
Parameters							
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
Case1	2.0E-3	0.3	6.0E-5	6.0E+2	1.0E-5	2.0E-06	3.0E+6
Case2	1.0E-3	6.0	1.0E-3	3.0E+2	5.0	1.2E+6	6.0E+5

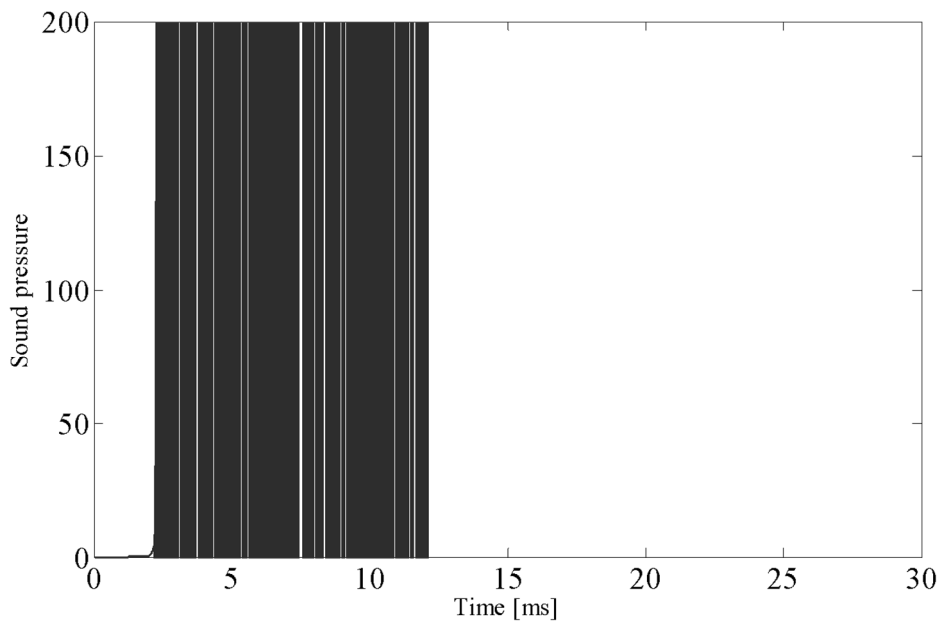
Stability conditions		
	Air propagation	Coupled System(1D)
Case1	1.68E-05	3.63E-06
Case2	1.68E-05	<u>1.41E-05</u>

The results		
	Air propagation	Coupled System(1D)
Case1	×	×
Case2	×	<u>×</u>



波動伝搬の安定条件を用いた場合



連成系（一次元）の安定条件を用いた場

Fig. 20 波動伝搬と連成系の安定性

#### 4.2.4 考察

波動伝搬の式(51)、及び、式(44)～(49)からなる連成系から導かれる安定条件を満たしているにも関わらず、Fig. 1 に示すような質点系を用いた解析において依然として値が不安定となる場合がみられた。したがって、FDTD 法による三次元解析において、媒質間に質点系を挟むモデル[5][6]を用いた解析を安定に行うためには、現状の安定条件では不十分であると考えられる。

### 4.3 三次元流体セルを用いた場合の安定条件

ここで、質点系の安定条件について改めて考える。三次元解析においても質点系部分は局所作用的に働くので、Fig. 17のような一次元として扱っても問題はないはずである。しかし、質点系に接する流体セルについては一次元ではなく三次元に拡張されるため、Fig. 17のような一次元の流体セルのままでは解析条件とは異なった安定条件となってしまう。そこで本節では流体セル部分を三次元の流体セルに置き換えた安定条件について考える。

#### 4.3.1 三次元流体セルを用いた三質点系の安定条件

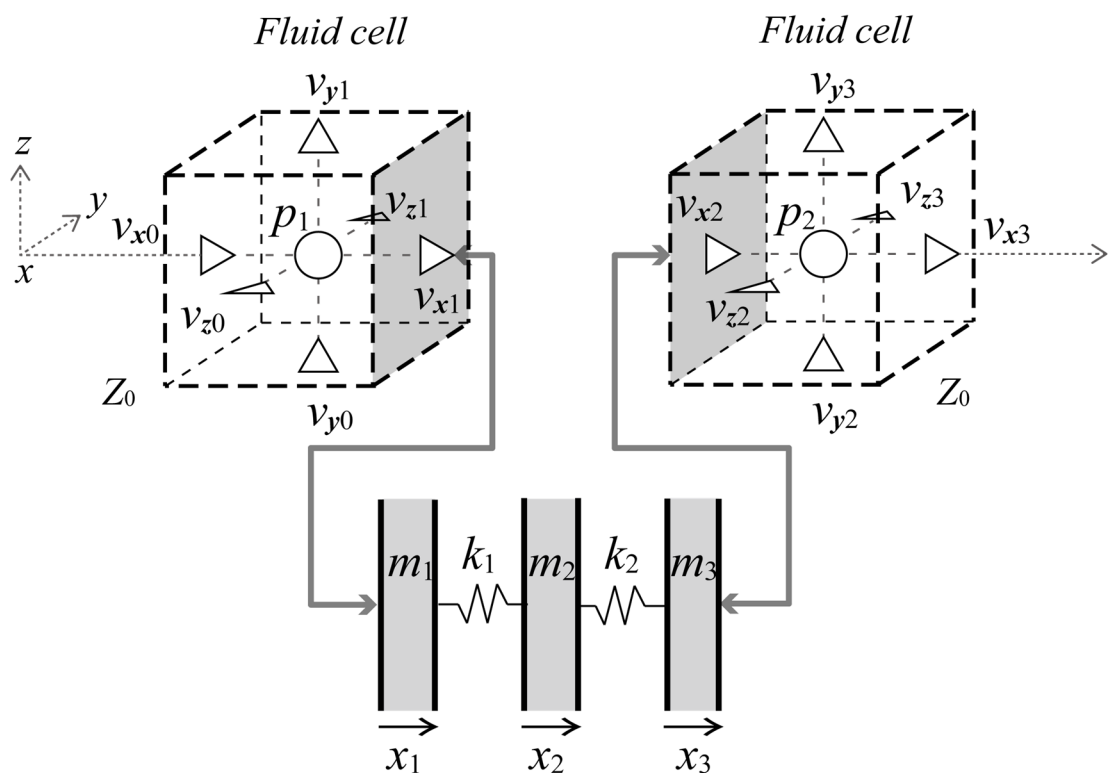


Fig. 21 連成系による三質点系モデル (三次元)

Fig. 21 のような三次元の流体セルに挟まれた質点系について、面密度を $m_{1,2,3}$ 、変位を $x_{1,2,3}$ 、単位面積当たりのばね定数を $k_{1,2}$ 、左右の流体セルの音圧を $p_{1,2}$ 、 $x$ 方向の粒子速度を $v_{x0,1,2,3}$ 、 $y$ 方向の粒子速度を $v_{y0,1,2,3}$ 、 $z$ 方向の粒子速度を $v_{z0,1,2,3}$ 、体積弾性率を $\kappa_{1,2}$ とし、また、流体セルの質点系と接していない面に流体セルの特性インピーダンス $Z_0$ を与えると次のような支配式と境界条件が得られる。



$$p_1 = m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + k_1(x_1 - x_2) \quad (52)$$

$$k_1(x_1 - x_2) = m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + k_2(x_2 - x_3) \quad (53)$$

$$k_2(x_2 - x_3) = m_3 \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + p_2 \quad (54)$$

$$v_{x1} = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad v_{x2} = \frac{\partial x_2}{\partial t} \quad (55)$$

$$v_{x0} = -\frac{p_1}{Z_0}, \quad v_{x3} = \frac{p_2}{Z_0} \quad (56)$$

$$v_{y0} = -\frac{p_1}{Z_0}, \quad v_{y1} = \frac{p_1}{Z_0} \quad (57)$$

$$v_{y2} = -\frac{p_2}{Z_0}, \quad v_{y3} = \frac{p_2}{Z_0} \quad (58)$$

$$v_{z0} = -\frac{p_1}{Z_0}, \quad v_{z1} = \frac{p_1}{Z_0} \quad (59)$$

$$v_{z2} = -\frac{p_2}{Z_0}, \quad v_{z3} = \frac{p_2}{Z_0} \quad (60)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\kappa_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \kappa_1 \frac{\partial v_y}{\partial x} - \kappa_1 \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (61)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\kappa_2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \kappa_2 \frac{\partial v_y}{\partial x} - \kappa_2 \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (62)$$

これまでと同様に、式(52)～(62)を差分近似し、状態遷移方程式をつくると、

$$\begin{bmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ x_1^{n+1} \\ x_1^n \\ x_2^{n+1} \\ x_2^n \\ x_3^{n+1} \\ x_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \left( \frac{\Delta t}{m_1} + \frac{1}{Z_0} \right) - \frac{2\kappa_1}{Z_0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta y} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) & 0 & -\kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x_1} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_1}{m_1} \Delta t \right) & \frac{\kappa_1}{\Delta x_1} & -\kappa_1 \frac{\Delta t^2}{\Delta x_1} \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_2 \frac{\Delta t}{\Delta x_2} \left( \frac{\Delta t}{m_3} + \frac{1}{Z_0} \right) - \frac{2\kappa_2}{Z_0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta y} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) & 0 & 0 & \kappa_2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x_2} \frac{k_2}{m_3} & 0 & \kappa_2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x_2} \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{k_2}{m_3} \Delta t \right) & -\frac{\kappa_2}{\Delta x_2} \\ \frac{\Delta t^2}{m_1} & 0 & 2 - \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & -1 & \frac{k_1}{m_1} \Delta t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_2} \Delta t^2 & 0 & 2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} \Delta t^2 & -1 & \frac{k_2}{m_2} \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta t^2}{m_3} & 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} \Delta t^2 & 0 & 2 - \frac{k_2}{m_3} \Delta t^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^n \\ P_2^n \\ x_1^{n-1} \\ x_1^n \\ x_2^{n-1} \\ x_2^n \\ x_3^{n-1} \\ x_3^n \end{bmatrix} \quad (63)$$

となり、これらの系が安定となるためには右辺の行列の全ての固有値の絶対値が 1 以下となるように  $\Delta t$  を定めればよい。

### 4.3.2 条件設定

解析対象として Fig. 19 に示すような直方体内部を面で分断するような空間について考え、 $\Delta t$ 以外の条件については前節と同様とする。このときの安定条件として、波動伝搬の式(51)、及び、式(44)～(49)からなる一次元の連成系の安定条件に加えて、式(52)～(62)からなる三次元の連成系の安定条件のうち、最も厳しい安定条件を満たした $\Delta t$ を FDTD 法に用いて解析する。

### 4.3.3 結果

三次元流体セルを連成系に考慮した三質点系について、質点系のパラメータ、それぞれの安定条件、及び、それぞれの安定条件を用いた解析結果について安定であれば、不安定であれば×として Table 7 に示す。また、三質点系の Case2 の音圧と時間軸の関係を Fig. 22 に示す。波動伝搬の式(51)、及び、Fig. 21 のような三次元流体セルを加えたモデルから導かれる安定条件のうち、最も厳しい $\Delta t$ を安定条件として解析に用いることで、無作為に定めたパラメータを用いても値が発散せず、Fig. 22 に示すように正常に解析が行え、三次元解析においても安定な解を得ることができた。

Table 7 連成系を考慮した三質点系による安定性 (三次元)

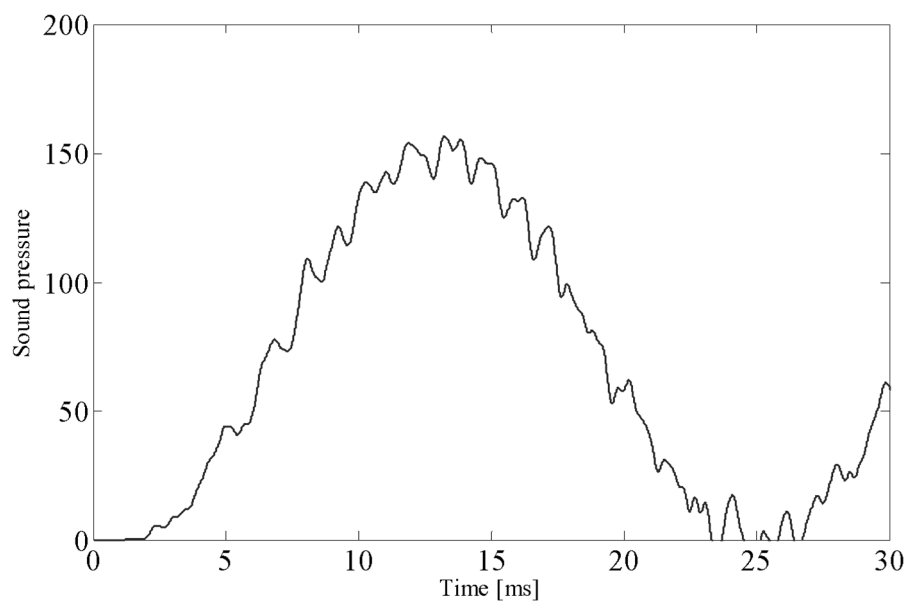
Parameters							
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$
Case1	2.0E-3	0.3	6.0E-5	6.0E+2	1.0E-5	2.0E-06	3.0E+6
Case2	1.0E-3	6.0	1.0E-3	3.0E+2	5.0	1.2E+6	6.0E+5

Stability conditions			
	Air propagation	Coupled System(1D)	Coupled System(3D)
Case1	1.68E-05	3.63E-06	<b>3.24E-06</b>
Case2	1.68E-05	<u>1.41E-05</u>	<b>8.55E-06</b>

The results			
	Air propagation	Coupled System(1D)	Coupled System(3D)
Case1	×	×	○
Case2	×	<u>×</u>	○



連成系（三次元）の安定条件を用いた場合

Fig. 22 連成系を考慮した場合の安定性

#### 4.3.4 考察

波動伝搬の式(51)と、式(52)～(62)からなる三次元の連成系から導かれる安定条件を満たした $\Delta t$ を用いることで、Fig. 19に示すような質点系を用いた解析においても安定な解を得ることができた。よって、FDTD法による三次元解析においても、媒質と媒質に質点系を挟むモデル[5][6]を用いた場合の安定条件を導出できたと言える。

## 5. 汎用ソフトウェアへの質点系境界条件の実装

豊田ら[7]によって Fig. 23 に示すような FDTD 法による振動音響連成解析の汎用ソフトウェアが開発されている。このソフトウェアでは、すでにいくつかの境界条件が実装されている。しかし、反射と透過の周波数特性を考慮できる汎用的な境界条件は現在のところ実装されていない。そこで、前章までの結果を踏まえて質点系を用いた境界条件を汎用ソフトウェアへ実装し、反射と透過の周波数特性を考慮できる汎用的な境界条件を用いた解析を一般ユーザーの方にも容易に行えるようにする。

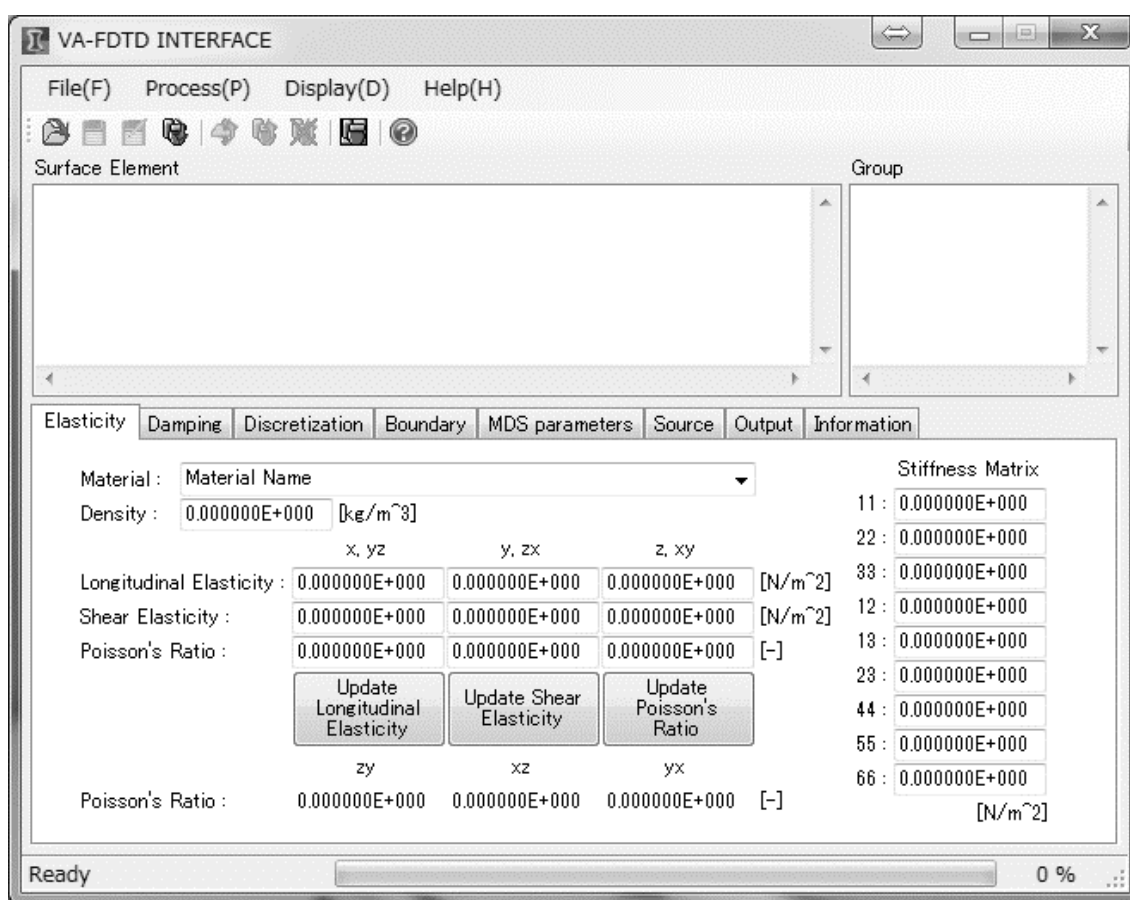


Fig. 23 FDTD 法による振動音響連成解析の汎用ソフトウェア(VA-FDTD INTERFACE)

## 5.1 媒質間に質点系を挟むモデルの境界面への導入

$x, y, z$ 方向の各境界面に対して、媒質と媒質の間に質点系を挟むようなモデル[5][6]の実装を行った。解析対象の境界面は離散化グリッドの軸に沿うように離散化されるため、Fig. 24に示すような離散化グリッドの軸に対して斜めに境界が存在する場合は工夫が必要である。そこで、境界の両端にある軸上の音圧を本来の境界面に接する両端の音圧として粒子速度を更新した後、軸と本来の境界がなす角より各軸方向成分を抜き出した粒子速度を、次のステップの音圧更新に用いることで、離散化グリッドの軸に対して境界が斜めの場合について考慮することができる。

ここで、Fig. 19のようなモデルについて、離散化グリッドに対して解析対象を斜めに配置した場合の結果について検討する。Fig. 25に示すように離散化グリッドに沿うように解析対象を配置した場合を Case1 とし、離散化グリッドと解析対象が  $45^\circ$  をなす様に配置した場合を Case2 として、4 章と同様の条件下で解析を行った。それぞれの音圧波形の比較を Fig. 25 に示す。Case1 と Case2 では差異がみられるが、提案手法によるものではなく、斜めにした解析対象を階段近似で離散化したことによって生じた差異と考えられる。よって、汎用ソフトウェアへ媒質間に質点系を挟むようなモデル[5][6]を用いた境界条件を実装できたと言える。

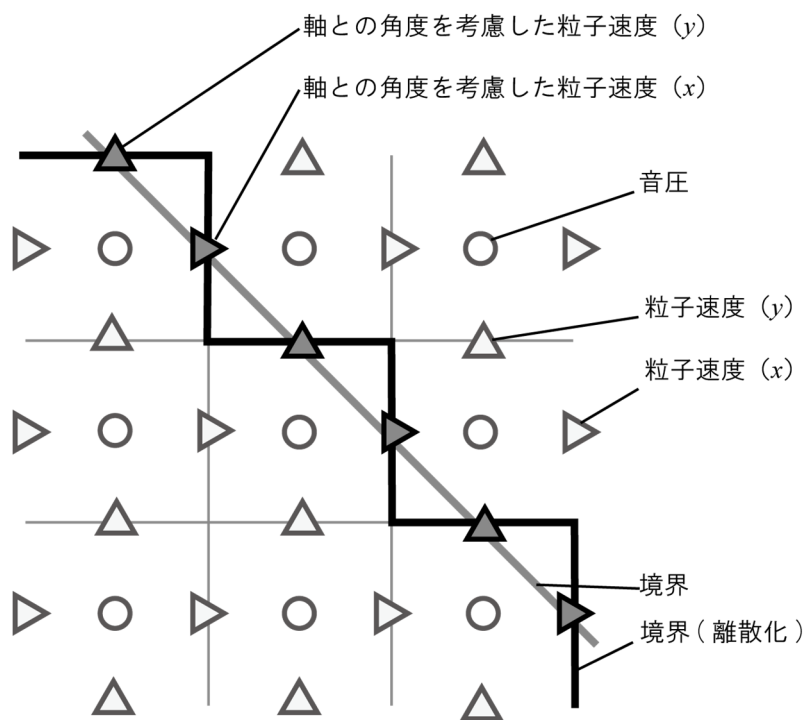
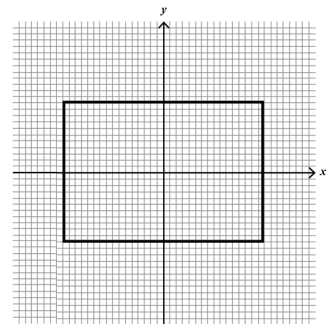
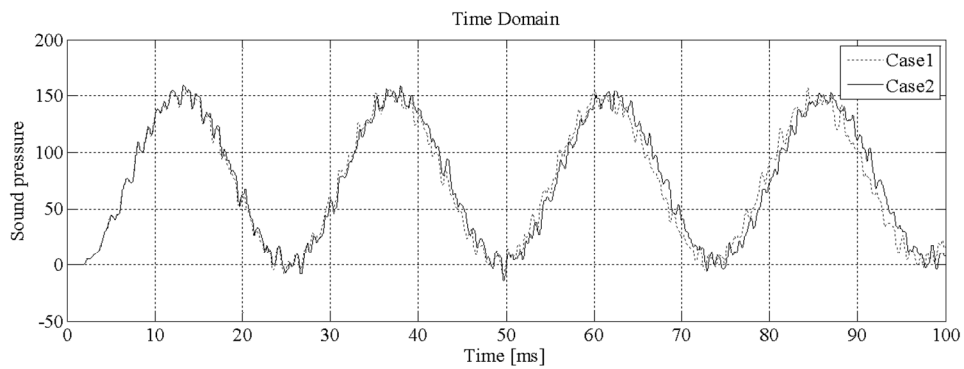
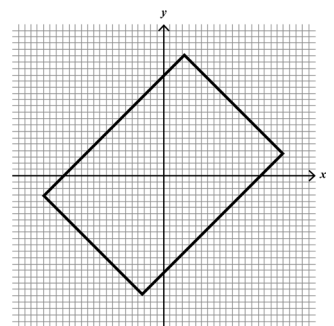
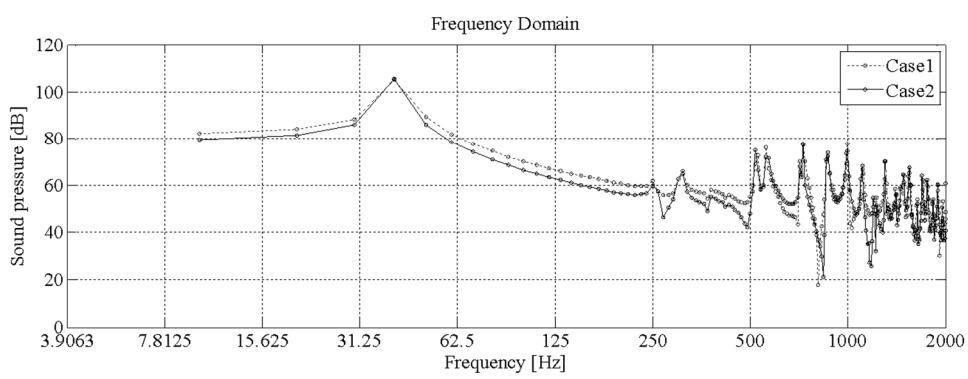


Fig. 24 軸に対して境界が角をなす場合の更新



0 ° (Case1)



45 ° (Case2)

Fig. 25 離散化グリッドに対して0°と45°場合の比較



## 5.2 質点系パラメータの自動最適化

質点系モデルを用いた境界では、質点系の 7 つのパラメータによってさまざまな吸音率と透過率を与えることができる。しかし、所望の吸音率と透過率を再現するパラメータを決定することは非常に難しく、試行錯誤を行う必要がある。この問題の解決策として、賢谷[8]によって、遺伝的アルゴリズムを用いた質点系パラメータの自動最適化が提案されている。この方法を採用し、目標とする周波数ごとの吸音率と透過率を与えることで、汎用ソフトウェアにおいて質点系境界の 7 つのパラメータを自動的に導出できるようにした。

Fig. 26 に汎用ソフトウェアの質点系パラメータの自動最適化画面を示す。まず、所望の周波数ごとの吸音率、透過率を入力したファイル (txt.形式) を用意する。「Read」にてこのファイルを読み込むことで目標値とするグラフが表示される。次に「Search」をクリックすることで、パラメータの自動最適化を行い、パラメータを決定する。最後に「Export」により、7 つのパラメータを質点系境界のパラメータとして使用することができるようにした。

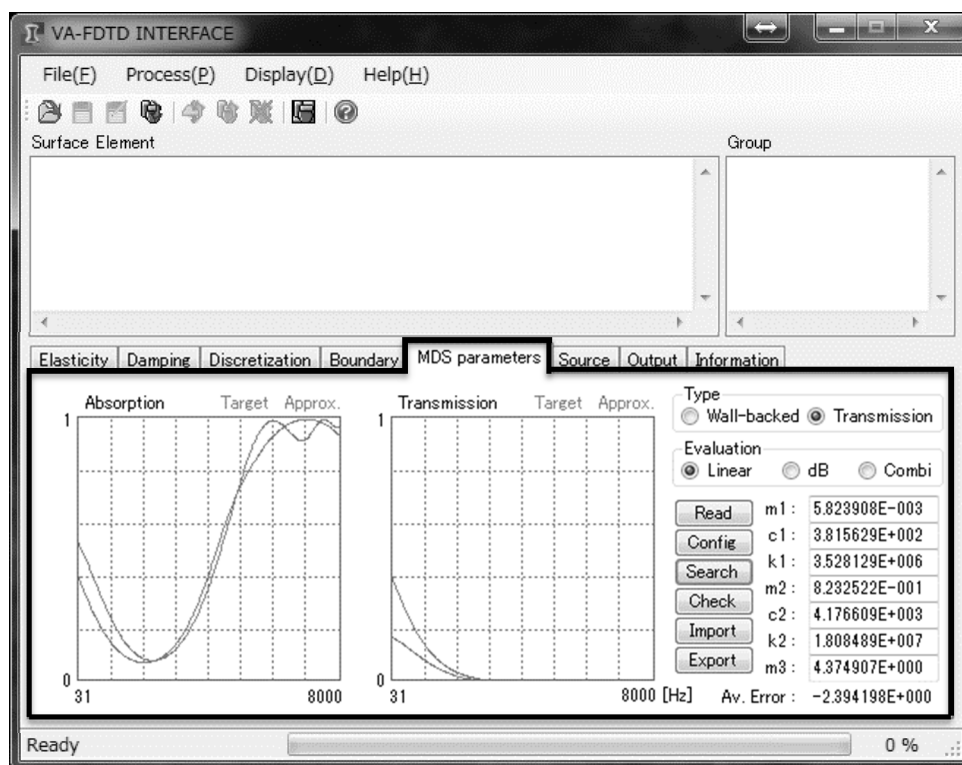


Fig. 26 汎用ソフトウェアにおける質点系パラメータの自動最適化

### 5.3 安定条件の自動最適化

5.1 節において媒質間に質点系を挟むモデルによる境界条件を実装した。また、5.2 節では所望の吸音率と透過率から 7 つのパラメータを自動最適化した。ここでは 4 章の検討を踏まえ、安定条件を満たすような  $\Delta t$  を自動的に決定するようにした。

Fig. 27 に汎用ソフトウェアの安定条件の自動最適化画面を示す。質点系を用いた境界条件について、質点系パラメータを与えると安定条件を満たす  $\Delta t$  が「Time Step」に自動入力される。Fig. 27 では、 $m_1 = 0.001$ ,  $c_1 = 300$ ,  $k_1 = 1.0 \times 10^6$ ,  $m_2 = 6.0$ ,  $c_2 = 5.0$ ,  $k_2 = 6.0 \times 10^5$ ,  $m_3 = 0.001$  をパラメータとして与えた場合の  $\Delta t$  が自動入力されている。

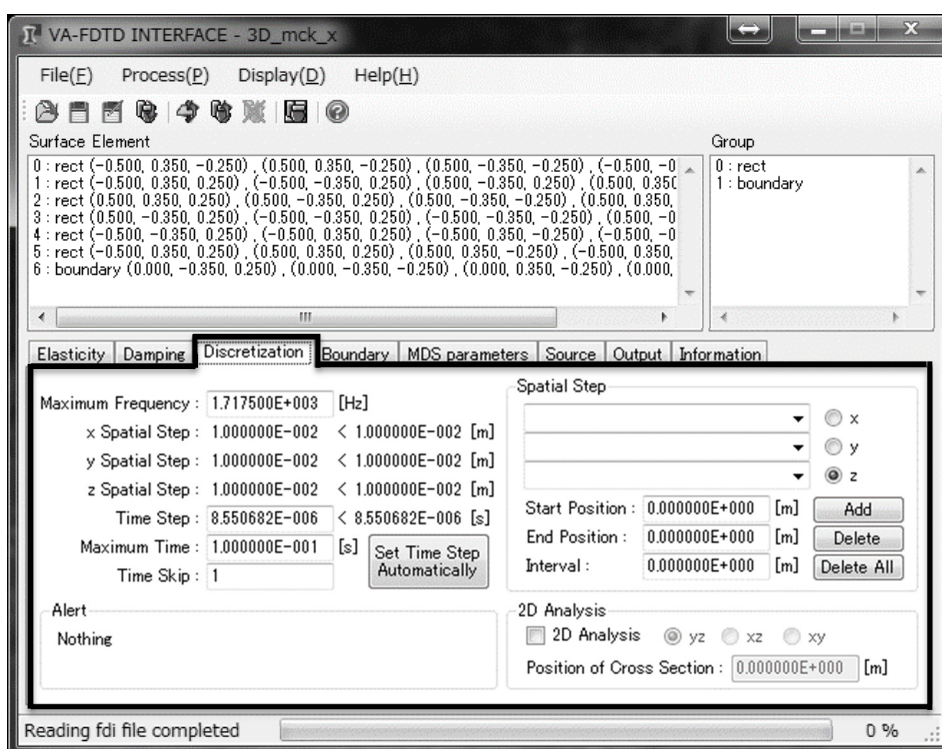


Fig. 27 汎用ソフトウェアにおける安定条件の自動最適化

## 6. おわりに

本報では、振動音響連成 FDTD 法に吸音と透過の周波数特性を考慮できる汎用的な境界条件を導入することを目的とし、質点系モデルを用いた FDTD 法において、任意の吸音と透過の周波数特性を模した場合の再現性について検討した。また、質点系境界を解析に導入した際の安定条件について述べ、汎用ソフトウェアに本報の内容を踏まえた質点系境界条件を実装した。

振動音響連成 FDTD 法に質点系境界を用いた場合、波動伝搬の安定条件に加えて、接する流体と質点系の連成系モデルを用いた安定条件も満たすことで安定な解を得ることが可能となった。また、本報では媒質間に質点系があるような場合について検討したが、布などの他の構造物の場合についても本報で示した手法と同様に解くことで安定条件を導出することが可能であり、提案手法は安定条件を導出する汎用的な手法としても有用であると考えられる。さらに、汎用ソフトウェアの質点系境界条件について、質点系パラメータと安定条件の自動最適化を用いることで、比較的容易にパラメータを決定し、かつ、安定な解を得ることが可能となった。

しかしながら、媒質間に質点系を挟むようなモデルにおいて、流体と固体間に質点系を挟むような場合については、安定条件の系が本報にて導出した系と異なるため、安定条件としては不十分であり値が不安定となる恐れがある。また、固体間に質点系を挟むような場合についても、現状の手法ではせん断応力を伝達できないためさらなる検討が必要である。

## 参考文献

- [1] Masahiro Toyoda, Daiji Takahashi, “Prediction for architectural structure-borne sound by the finite-difference time-domain method”, *Acoust.Sci. &Tech.* 30(4), 601-614, 2009
- [2] 日本建築学会編, 音環境の数値シミュレーション-波動音響解析の技法と応用-
- [3] Shinichi Sakamoto, Hiroshi Nagatomo, Ayumi Ushiyama and Hideki Tachibana, “Calculation of impulse responses and acoustic parameters in a hall by the finite-difference time-domain method”, *Acoust.Sci. &Tech.* 29(4), 256-265, 2008
- [4] 石川翔一郎, “FDTD 法におけるインピーダンス境界について”, 関西大学卒業論文, 37-42, 2012
- [5] 豊田政弘, 河井康人, 高橋大弐, “表面に吸音性を有する板のモデル化について”, 建音研資料, AA2013-01, 2013
- [6] 石川翔一郎, 豊田政弘, 河井康人, “質点系を用いた境界条件の連成 FDTD 法への導入”, 日本音響学会建音研資料, AA2013-47, 2013
- [7] 豊田政弘, 高橋大弐, 河井康人, 振動音響連成 FDTD 法の汎用ソフトウェア開発に向けて, 日本音響学会講演論文集, 1483-1486, 2011,
- [8] 賢谷俊樹, “質点系境界の自動最適化”, 関西大学卒業論文, 2015

## 謝辞

研究を進めるにあたり、お忙しい中数々のご指導ご鞭撻を頂いた主査の豊田政弘先生、副査の河井康人先生、原直也先生には熱くお礼申し上げます。また、ご協力いただいた建築環境工学第一研究室の方々や同期の皆様にも大変お世話になりました。心よりお礼申し上げます。

本研究は、上記の方々以外にも多くの方のご助力のもと、今日の完成に至ることができました。心より感謝の気持ちを込めて、謝辞と致します。

2015年2月16日