

FDTD 法におけるインピーダンス境界について

関西大学
環境都市工学部 建築学科
建築環境工学第一研究室
建 09-9 石川 翔一郎
指導教官 豊田 政弘 助教

目次

1 はじめに.....	3
1.1 研究背景.....	3
1.2 研究目的.....	4
2 インピーダンス境界の定義による誤差.....	5
2.1 FDTD 法を用いた手法.....	5
2.2 境界条件の検討.....	9
2.3 吸音率 α と比音響インピーダンスの関係 (確認).....	13
2.4 Δx の増加による誤差.....	17
2.5 周波数ごとの吸音率 α の違い.....	20
2.6 まとめ.....	24
3 剛でない壁の伝搬音の解析.....	25
3.1 壁の強制振動.....	25
3.2 剛でない壁.....	30
3.3 バネマスを用いた解析.....	38
4 おわりに.....	44
参考文献.....	45
謝辞.....	46

1 はじめに

1.1 研究背景

FDTD 法とは空間を離散化し、微分方程式の微分の部分を差分で近似する差分法の 1 種であり、日本語では時間領域有限差分法などと訳される。元々は電磁場解析の手法であるが、様々な波動伝搬問題に展開が可能で建築音響にも応用できる。この手法では空間をグリッドセルに分割し解析を行う。FDTD 法を用いて音の解析をする際、ある境界に到達した音の反射特性を再現するために導入される条件として境界条件がある。その境界条件の 1 つにインピーダンス境界があり、値を変えることで剛壁や完全吸音壁等のさまざまな壁を容易に想定することができる。だが、厳密には壁表面に境界条件を与えているだけで、その背後の壁の振動が考慮されていない問題がある。

1.2 研究目的

本研究では、FDTD法を用いた解析において表面に吸音性を持った壁が振動する場合、すなわち、音響的にも弾性的にも剛ではない壁の音の伝搬（空気と固体の伝搬）を考慮できる境界条件に関する検討を行い、解析的な解とその比較からその有効性を検証する。

2 インピーダンス境界の定義による誤差

2.1 FDTD 法を用いた手法

2.1.1 FDTD 法による音場解析の概要[1]

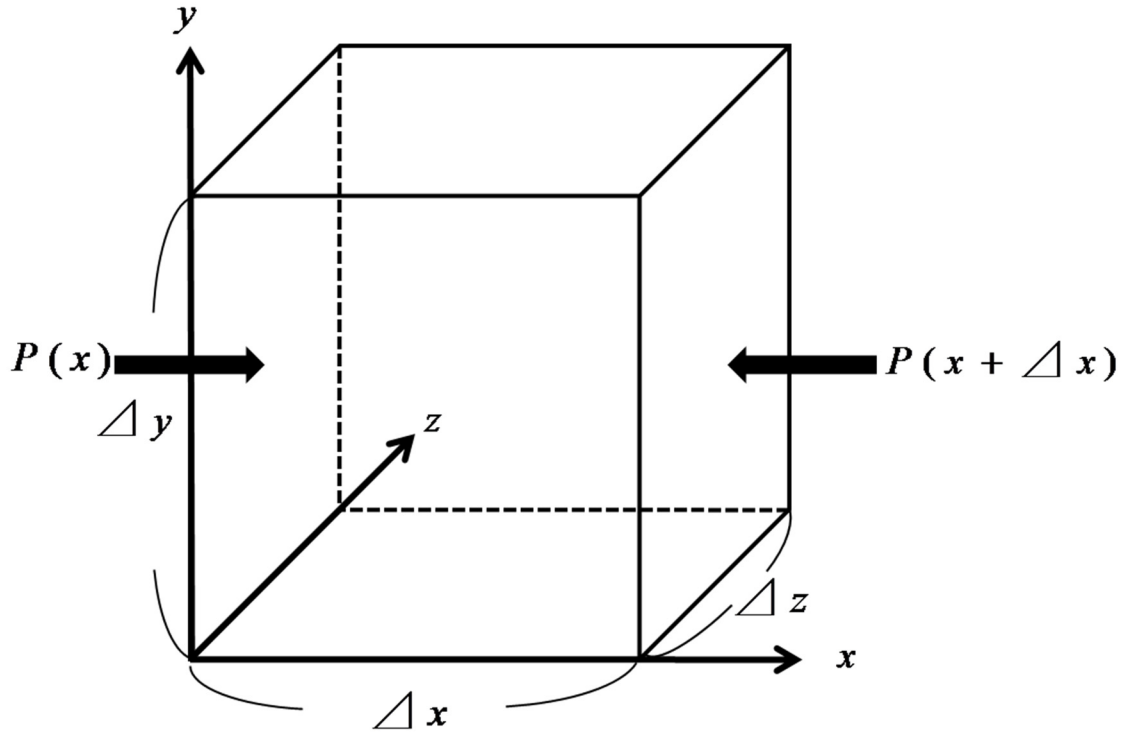


図 1 解析対象空間内の微小体積（運動方程式）

解析対象空間内の微小体積を図 1 に示す。空気の密度を ρ_0 、変位を u_x 、音圧を $P(x)$ 、微小体積の各辺の長さを Δx 、 Δy 、 Δz とすると x 方向運動方程式は、

$$\rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \{P(x) - P(x + \Delta x)\} \Delta y \Delta z \quad (1)$$

となり、速度を v_x とすると(1)式は

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = - \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

と変形できる。同様に y 方向運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

z 方向運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4)$$

となる。これらより、運動方程式を差分近似すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \rho_0 \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta t} = -\frac{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta x} \\ \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \rightarrow \rho_0 \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - v_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta t} = -\frac{P^n(i, j+1, k) - P^n(i, j, k)}{\Delta y} \\ \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} \rightarrow \rho_0 \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = -\frac{P^n(i, j, k+1) - P^n(i, j, k)}{\Delta z} \end{array} \right. \quad (5)$$

となる。ここで i, j, k は空間ステップ数、 n は時間ステップ数を表す。これより v_x の更新式は

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\Delta t}{\rho_0 \Delta x} \{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)\} \quad (6)$$

となる。ここで、音速を c_0 、特性インピーダンスを $Z_n = \rho_0 c_0$ 、クーラン数を $\alpha = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ とおくと

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = v_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \frac{\alpha}{Z_n} \{P^n(i+1, j, k) - P^n(i, j, k)\} \quad (7)$$

と表せる。また、連続の式は以下のようになる。

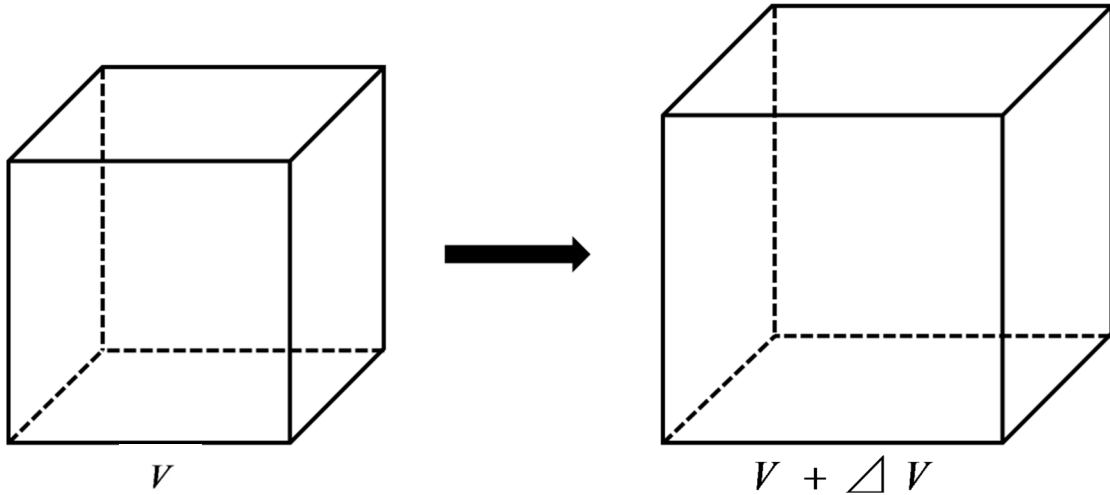


図 2 解析対象空間の微小体積 (連続の式)

図 2 に改めて解析対象空間の微小体積を示す。

ここで図中それぞれの体積は

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$V + \Delta V = (\Delta x + \Delta u_x)(\Delta y + \Delta u_y)(\Delta z + \Delta u_z) \doteq \Delta x \Delta y \Delta z + \Delta y \Delta z \Delta u_x + \Delta x \Delta y \Delta u_z + \Delta x \Delta z \Delta u_y \text{ である。}$$

体積弾性率(= $\rho_0 c_0^2$)を K とすると

$$\begin{aligned} P &= -K \frac{\Delta V}{V} \\ &= -K \frac{\Delta y \Delta z \Delta u_x + \Delta x \Delta y \Delta u_z + \Delta x \Delta z \Delta u_y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= -K \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta x} + \frac{\Delta u_y}{\Delta y} + \frac{\Delta u_z}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

v を速度ベクトルとし、この両辺を時間で微分し、極限をとると

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -K \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (9)$$

となり、(9)式は

$$\begin{aligned} & \frac{P^{n+1}(i,j,k) - P^n(i,j,k)}{\Delta t} \\ &= -K \left\{ \frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta x} \right. \\ & \quad + \frac{v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2},k\right)}{\Delta y} \\ & \quad \left. + \frac{v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これより P^{n+1} の更新式は

$$\begin{aligned} P^{n+1}(i,j,k) &= P^n(i,j,k) - \alpha Z_n \left\{ v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - v_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j,k\right) \right\} \\ & \quad - \alpha Z_n \left\{ v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - v_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2},k\right) \right\} \\ & \quad - \alpha Z_n \left\{ v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) - v_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

2.1.2 1次元の更新式

本研究の解析では1次元の場合を仮定して、 x 方向についてのみ考える。以下に今回の解析での流れを示す。 i を空間ステップ数、 n を時間ステップ数、音圧を p 、粒子速度を v とし、クーラン数を C 、比音響インピーダンスを Z_n とし、条件としてある一点に音圧の時間波形を与える。粒子速度の更新式は(7)式の値より

$$v^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right)=v^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right)-\frac{C}{Z_n}\{p^n(i+1)-p^n(i)\} \quad (12)$$

となる。音圧の更新式は(11)式と(12)式より

$$p^{n+1}(i)=p^n(i)-CZ_n\left\{v^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right)-v^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad (13)$$

となる。

次に境界条件を設定する。例えば、 $i=i_0$ に置かれた剛壁の場合、境界面の粒子速度は0になるので $v(i_0)=0.0$ となる。(12)(13)式、および境界条件を逐次計算することで音圧と粒子速度が更新される。

2.2 境界条件の検討

2.2.1 音響的にも剛で弾的にも剛でない壁のモデル化

壁面の境界条件として、音響的にも剛で弾的にも剛でない壁と弾的にも剛で音響的にも剛でない壁の2種類の壁を考える。まず、図3に示すような音響的にも剛な壁について空気中の粒子速度を v_a 、固体中の粒子速度を v_b として

$$v_a = v_b \quad (14)$$

の関係が成り立つ。

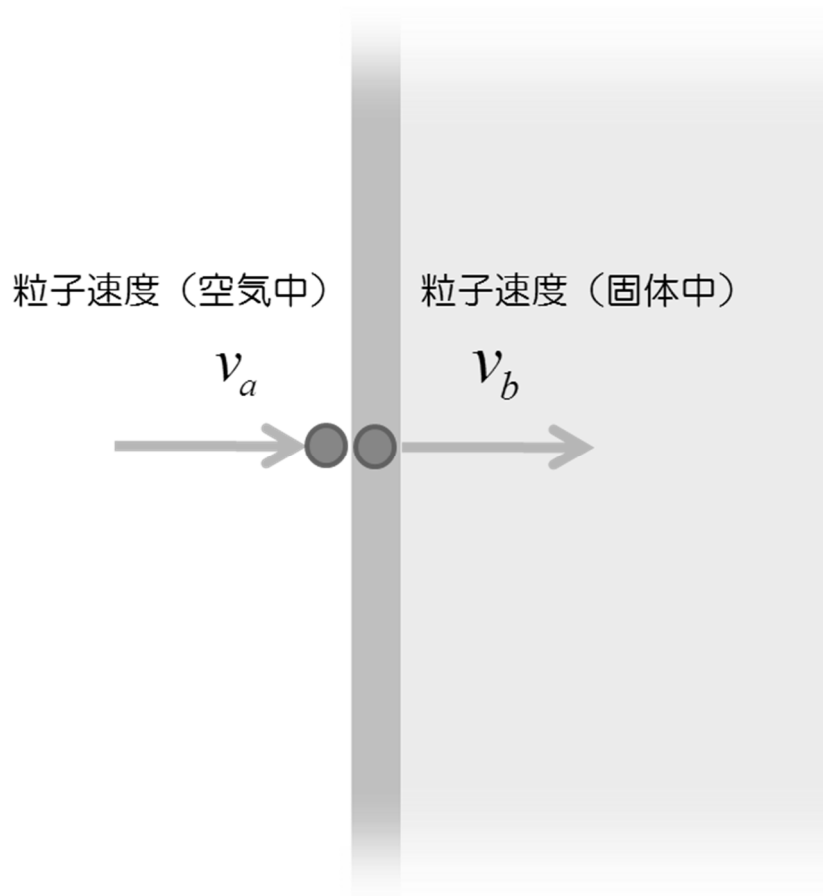


図3 音響的にも剛で弾的にも剛でない壁

2.2.2 弾性的に剛で音響的に剛でない壁のモデル化

次に弾性的に剛で音響的に剛でない壁については図 4 のように境界面にインピーダンスを仮定し、粒子速度 v_a は境界面の音圧 p と比音響インピーダンス Z_n によって

$$v_a = \frac{p}{Z_n} \quad (15)$$

となる。

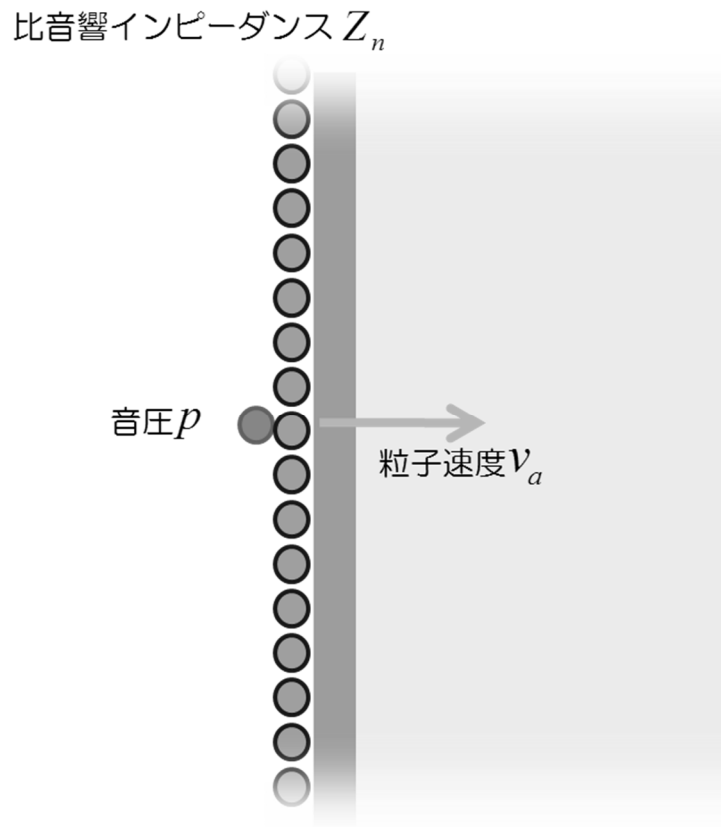


図 4 弾性的に剛で音響的に剛でない壁

2.2.3 音響・弾性的に剛でない壁のモデル化

本研究で解析したい音響・弾性的に剛でない場合の境界条件について、音響的に剛で弾性的に剛でない壁の場合の(14)式と、弾性的に剛で音響的に剛でない壁の場合の(15)式を合わせ、

$$v_a = v_b - \frac{P}{Z_n} \quad (16)$$

が得られ、これを境界条件として考える。[2]

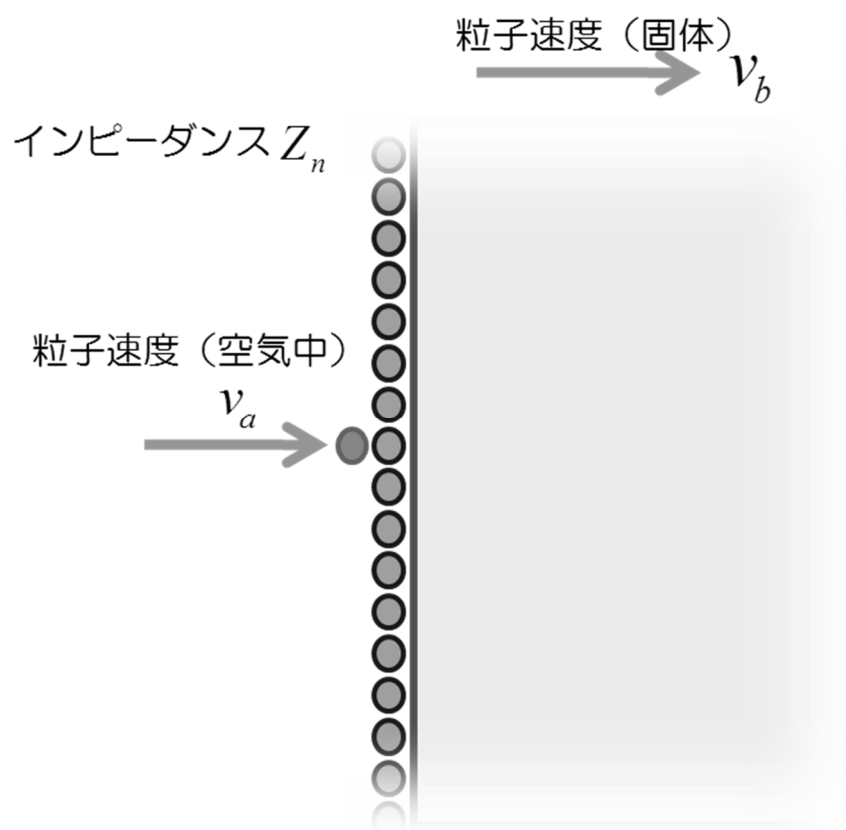


図 5 音響的にも弾性的にも剛でない壁

2.2.4 粒子速度と音圧の定義位置のズレ

FDTD法において、音圧と粒子速度の定義点は半グリッドずれている。したがって、図6に示すような壁面の粒子速度を求めるには、半グリッドずれた隣の音圧を用いて粒子速度を求める。

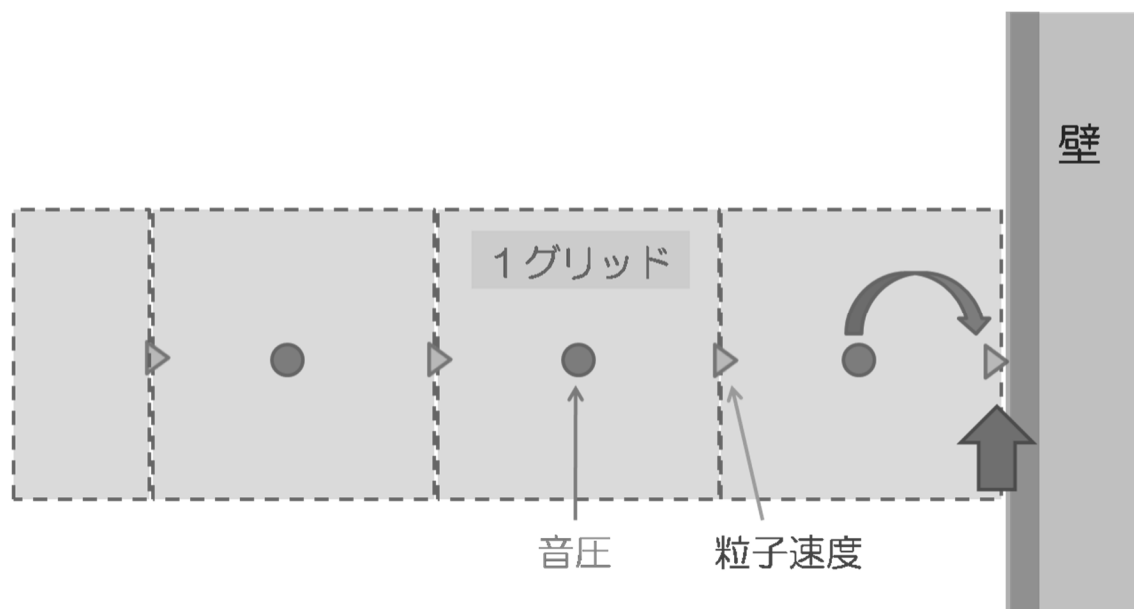


図6 粒子速度と音圧の定義位置のズレ

音響的にも弾性的にも剛ではない壁の音の伝搬について、(15)式からなる(16)式を使用すると上記のように半グリッド分のずれを持つので、それによる誤差について検証する必要がある。

2.3 吸音率 α と比音響インピーダンスの関係 (確認)

2.3.1 方法

建築音響では、境界における吸音条件として吸音率が用いられることが多い。
垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の間には次の関係がある。

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z_n - \rho_0 c_0}{Z_n + \rho_0 c_0} \right|^2 \quad (17)$$

α より Z_n を求めると、

$$Z_n = \rho_0 c_0 \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{1 - \sqrt{1 - \alpha}} \quad (18)$$

図 7 は空気密度 $\rho_0 = 1.205 \text{ kg/m}^2$ 、音速 $c_0 = 340 \text{ m/s}$ としたときの主な値をまとめたグラフである。吸音率 1 のとき Z_n は 410 に収束し、また、 $\alpha = 0.0$ のときは $Z_n = \infty$ である。

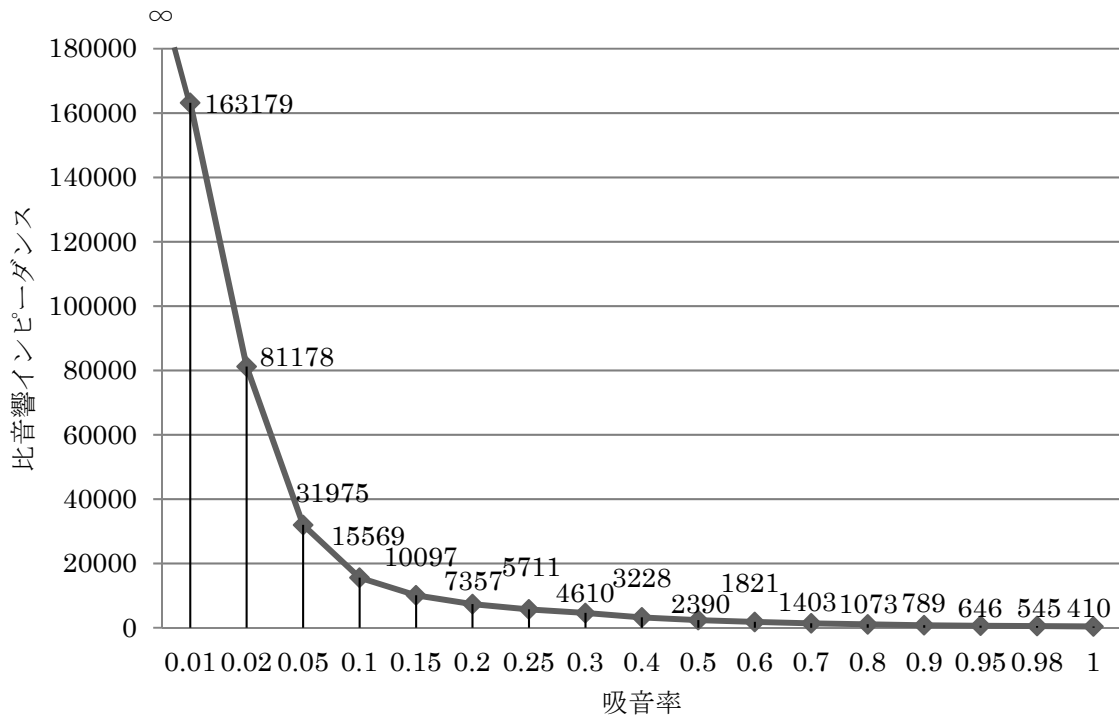


図 7 垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係

図 7 の関係が FDTD 法においても、垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係が成り立つのかを検証する。

2.3.2 条件設定

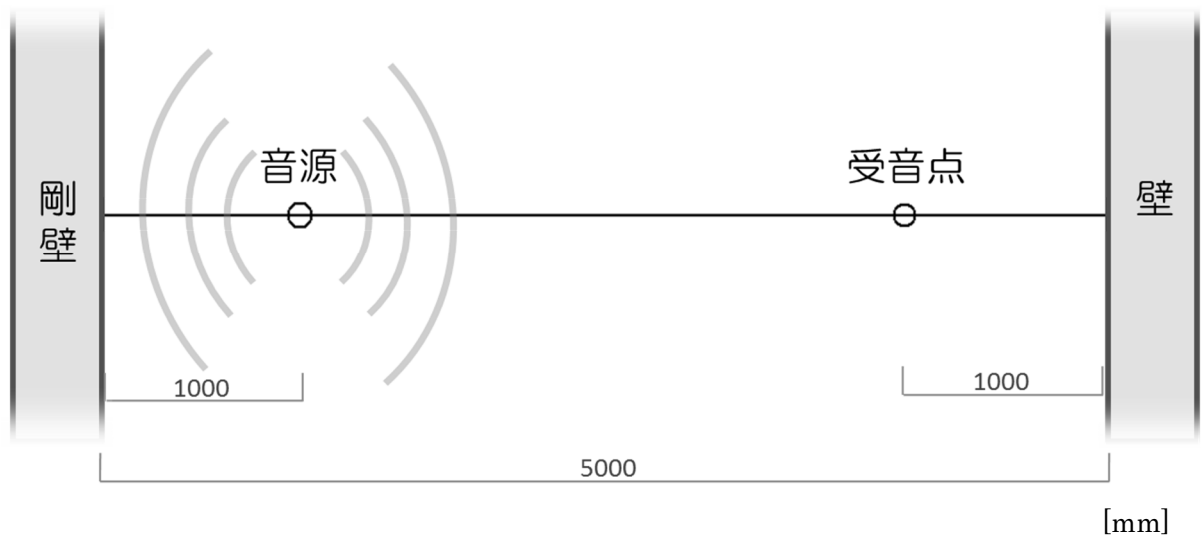


図 8 2.3 モデル図 (1次元)

垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係の検証のための1次元のモデルの条件設定を図8に示す。左の壁は剛とみなし、それぞれの壁から1000 mm離れた位置に音源と受信点を置く。右の壁の吸音率が0.1、0.2、0.3、0.5、0.7、0.9のときを調べる。音圧と粒子速度から吸音率を求める。入力波は $e^{-2 \times 10^7 \times (t-0.005)^2}$ のガウシアンパルスで、時間分割数 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ s、空間分割幅 $\Delta x = 1$ mmとする。

2.3.3 結果

垂直入射吸音率 α と音響インテンシティの比較したグラフを図9に示す。

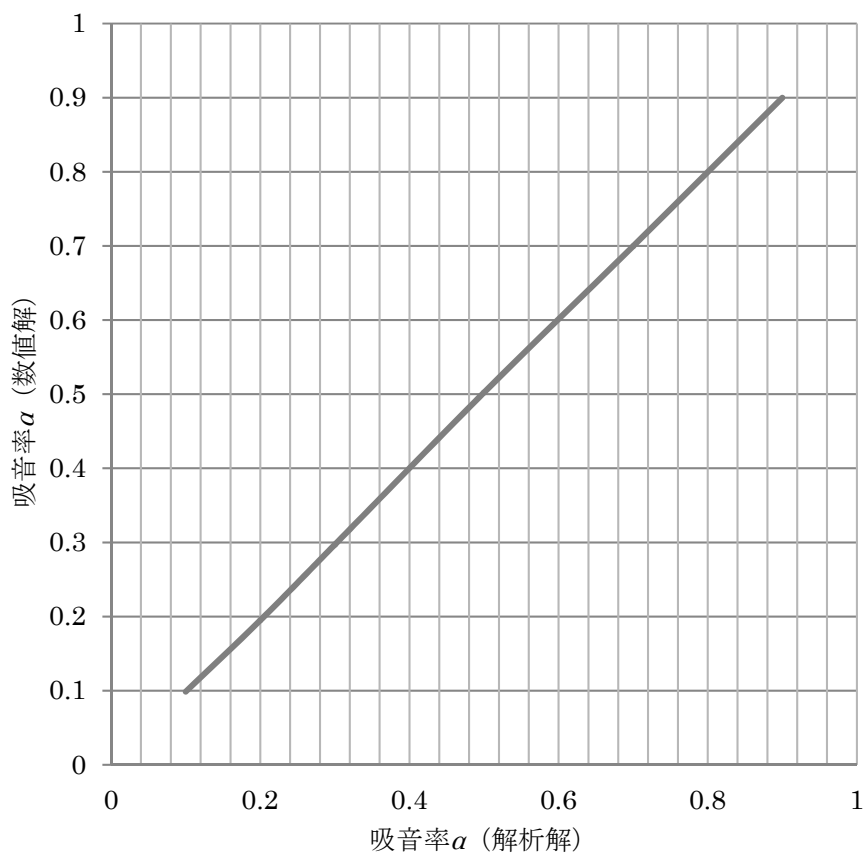


図9 垂直入射吸音率 α と音響インテンシティの比較

2.3.4 考察

それぞれの吸音率のときの数値解が解析解とほぼ等しい値を取っていた。つまり、図 9 の結果より、FDTD 法においても垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係が成り立つと言える。

2.4 Δx の増加による誤差

2.4.1 方法

次に誤差の原因の一つでもあるグリッド（点）の幅 Δx を大きくしていくことで、どの程度の誤差が生じるか検討する。

2.4.2 条件設定

2.3.2 条件設定の図 8 のときと同じく左の壁は剛とみなし、それぞれの壁から 1000 mm 離れた位置に音源と受音点を置く。音圧と粒子速度から吸音率を求める。右の壁の吸音率が 0.0、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0 のとき、 Δx は 1 mm、5 mm、10 mm、50 mm、100 mm、500 mmについて調べる。入力波は $e^{-2 \times 10^7 \times (t-0.005)^2}$ 、 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ s、とする。ただし、分割幅を増やすと FDTD 法の安定条件を満たさない場合は入力波や Δt を調整して解析を行う。 $\Delta x=1$ のときは $\Delta t = 2.64 \times 10^{-6}$ に、 $\Delta x=5、10$ のときは $\Delta t = 2.64 \times 10^{-5}$ に、 $\Delta x=50、100$ のときは $\Delta t = 1.470 \times 10^{-4}$ かつ、入力波は $e^{-2 \times 10^6 \times (t-0.005)^2}$ に変更している。

2.4.3 結果

Δx の増加による誤差をまとめたグラフを図 10 に示す。

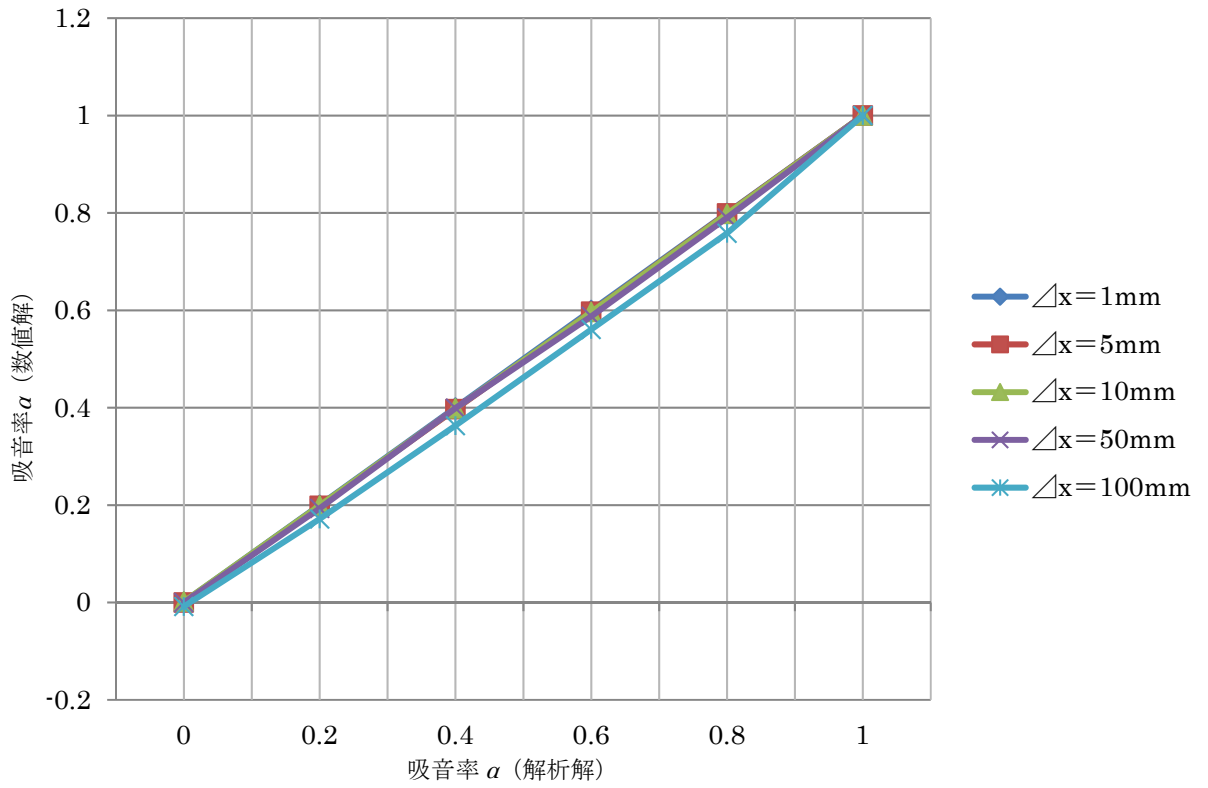


図 10 Δx の増加による誤差

2.4.4 考察

1 mm、5 mm、10 mm、50 mm、100 mmと Δx が大きくなるほど誤差が大きくなるのが分かる。特に100 mmで誤差が目立つ。500 mm についても解析を行ったが、誤差が大きすぎて値が出なかったが100 mmのグラフよりもさらにずれたグラフになると考えられる。

2.5 周波数ごとの吸音率 α の違い

2.5.1 方法

図 11 に示すようにガウシアンパルスであってもフーリエ変換すると高い周波数、低い周波数などいろいろな波形に分けることが可能である。ここで、低い周波数は傾きが緩やかなので、ある点の値とある点から Δx だけ離れた値との差は少なくなり、逆に高い周波数は傾きが急なので、ある点の値とある点から Δx だけ離れた値との差は大きくなる。したがって、周波数によってFDTD法の数値解に違いがある可能性がある。よって、周波数ごとの吸音率 α の違いについて検証する。

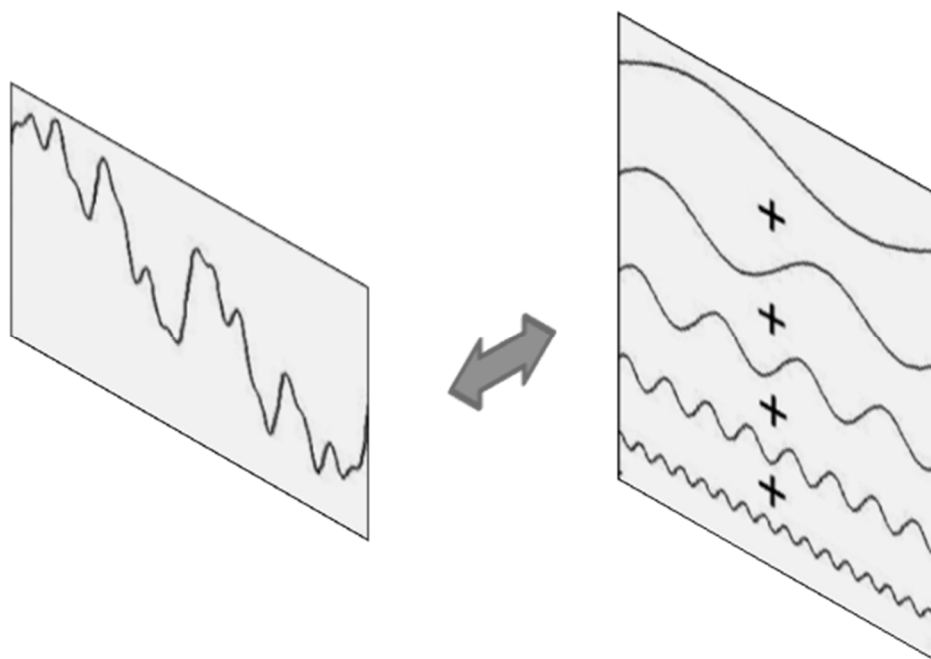


図 11 波形の合成と分解

2.5.2 条件設定

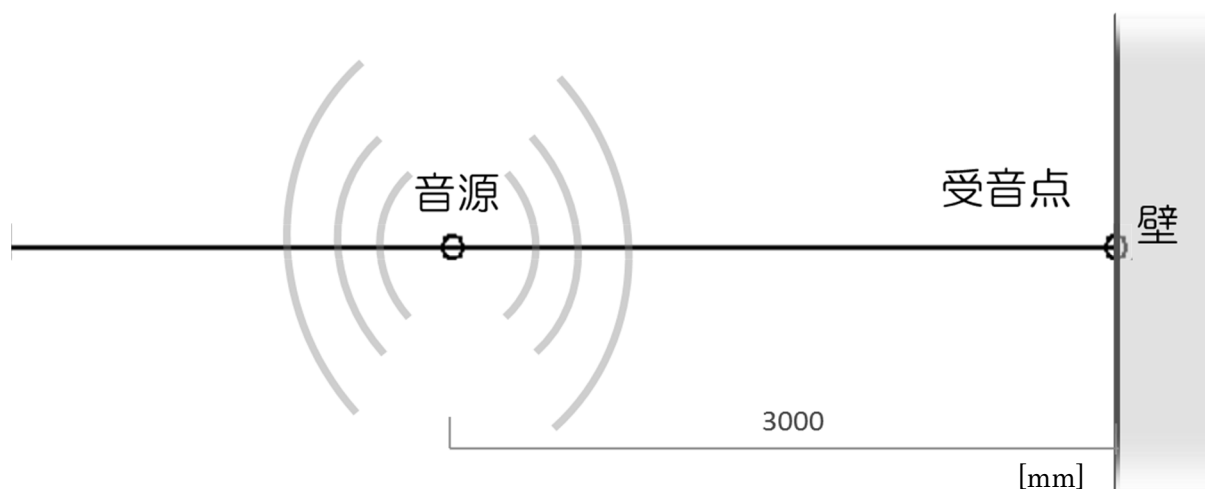


図 12 2.5 モデル図 (1次元)

周波数ごとの吸音率 α の違いの検証のための1次元のモデルの条件設定を図12に示す。入力波形はガウシアンパルスからsin波に変更し、左壁は完全吸音にして右壁の吸音率を変化させ、吸音率の再現性による誤差について検証する。吸音率 α は0.0、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0のとき、周波数 f は62.5 Hz、125 Hz、250 Hz、500 Hz、1000 Hzのときについて調べ、音圧と粒子速度より吸音率を求める。右側の壁から3000 mm離れた位置に音源を、右側の壁面上に受信点を置く。また、 Δx は10 mmとする。

2.5.3 結果

解析解と数値解の誤差をまとめたグラフを図 13 に示す。

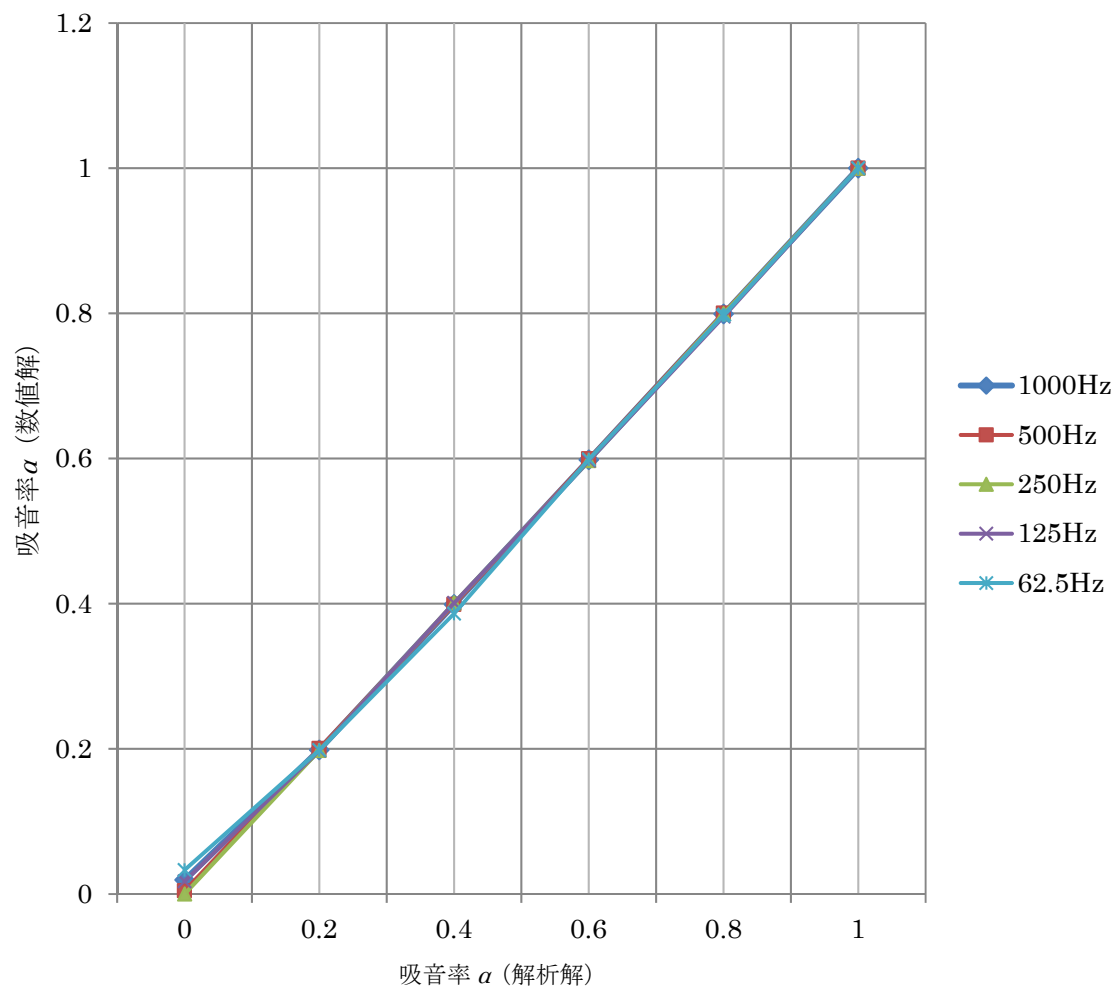


図 13 周波数ごとの吸音率 α の解析解と数値解

2.5.4 考察

吸音率 0.0 では周波数によって数値解にバラつきが多いように見える。高い周波数でも低い周波数でも多かれ少なかれ誤差があるが、いずれも 1%以下で非常に僅差である。実際には FDTD 法では分割数が十分に小さくなるよう設定する場合が多く、半グリッドずれた場所の音圧 p を使用することによる誤差は周波数にほぼ関係ないと言える。

2.6 まとめ

まとめとして、FDTD法においても垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係は成り立つ。また、周波数による影響はほぼ関係ない。したがって、半グリッドずれた位置の音圧 p を使用する誤差はほとんどないと言える。よって、音響的にも弾性的にも剛でない場合の境界条件について次章以降、(16)式の境界条件と半グリッドずれた位置の音圧を用いて解析を行う。

3 剛でない壁の伝搬音の解析

3.1 壁の強制振動

3.1.1 方法

前章までの検討結果を踏まえて、図 14 のような剛でない壁を強制振動させた場合、つまり固体音の予測[3] [4]について検証する。まず、FDTD 法による数値解を比較するために解析解を考える。

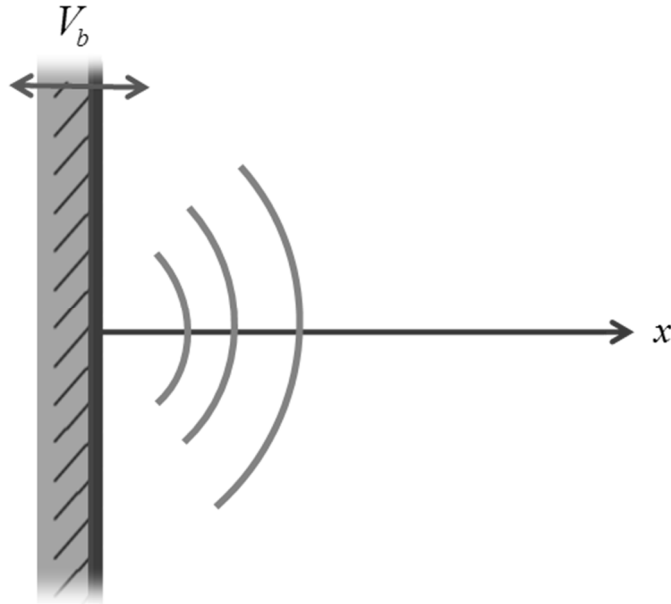


図 14 壁の強制振動の解析解モデル

壁を速度 V_b で振動させたときのモデルを図 14 に示す。音圧を p 、粒子速度を u 、振幅を P 、波数を k とすると

$$p = P e^{ikx} \quad (19)$$

粒子速度を v 、空気の密度を ρ_0 、音速を c_0 とすると

$$v = \frac{1}{\rho_0 c_0} P e^{ikx} \quad (20)$$

となる。壁面上は $x = 0$ なので音圧は(19)式より

$$p(0) = P \quad (21)$$

粒子速度は(20)式より

$$v(0) = \frac{1}{\rho_0 c_0} P \quad (22)$$

となる。境界条件は、比音響インピーダンスを Z_n とすると

$$v(0) = V_b - \frac{p(0)}{Z_n} \quad (23)$$

となり、(22)、(23)式より

$$\frac{1}{\rho c} P = V_b - \frac{p(0)}{Z_n} \quad (24)$$

(24)式を解くと

$$P = \frac{1}{\frac{1}{\rho_0 c_0} + \frac{1}{Z_n}} V_b \quad (25)$$

となる。また、剛な場合の P は

$$P_{\text{剛}} = \rho_0 c_0 V_b \quad (26)$$

となる。(25)、(26)式の比をとると

$$\frac{P}{P_{\text{剛}}} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\rho_0 c_0} + \frac{1}{Z_n}}}{\rho_0 c_0} \quad (27)$$

となり、変形すると

$$\frac{P}{P_{\text{剛}}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_0 c_0}{Z_n}} \quad (28)$$

となる。つまり、剛な場合に比べて振幅 P は $\frac{1}{1 + \frac{\rho_0 c_0}{Z_n}}$ 倍になる。

3.1.2 条件設定

入力波 $P_{in}(t) = V_b \sin(\omega t)$

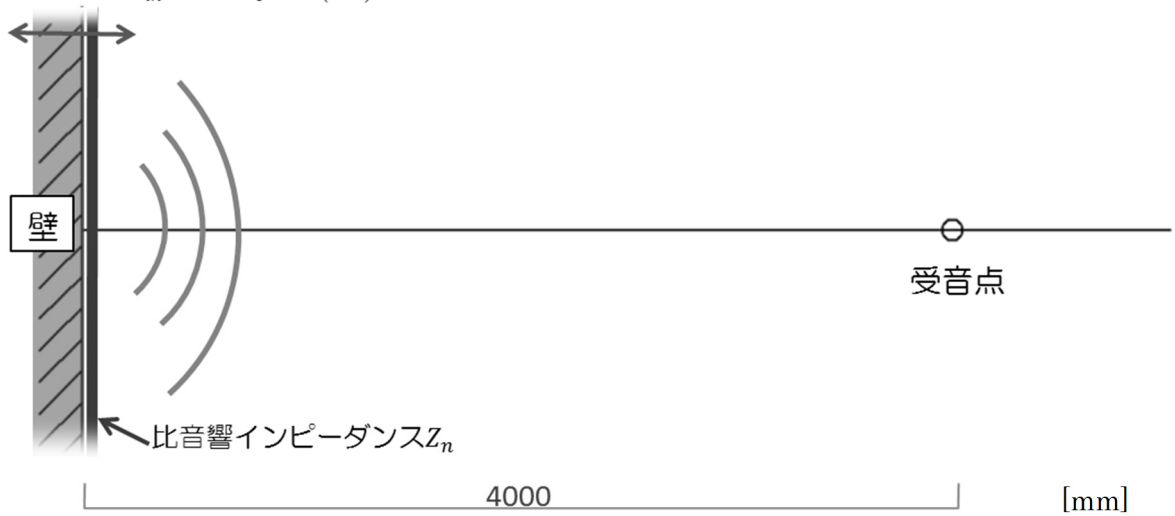


図 15 壁の強制振動モデル図



図 16 音圧と粒子速度の更新モデル

図 15 に壁の強制振動のモデル図を、図 16 に音圧と粒子速度の更新モデルを示す。入力波は $V_b \sin(\omega t)$ 、 $V_b = 1$ で、周波数 f は 62.5 Hz、125 Hz、250 Hz、500 Hz、1000 Hz のとき、吸音率 α は 0.0、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0 のときについて調べる。音圧は半グリッドずれた位置の値を使用し、境界条件は(16)式を使用する。また、音圧と粒子速度の振幅を求め、数値解は(28)式の解析解と比較する。

3.1.3 結果

音圧 p の振幅を図 18 に、粒子速度 u の振幅を図 17 に示す。

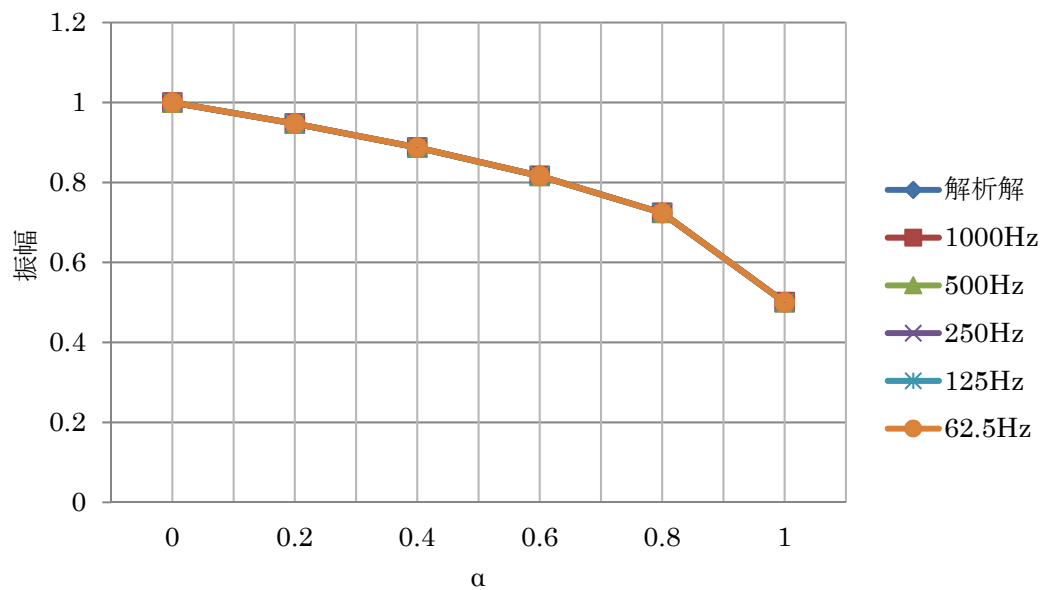


図 18 音圧 p の振幅

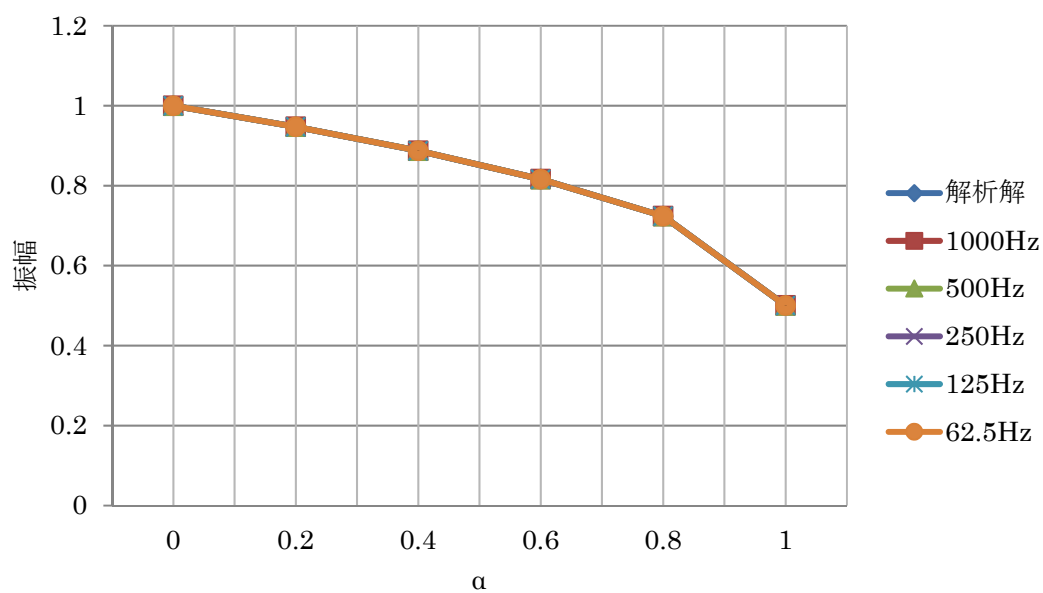


図 17 粒子速度 u の振幅

3.1.4 考察

前章の結果同様、周波数による誤差はあまり見られず、数値解と解析解は同じ値を取っていた。

3.2 剛でない壁

3.2.1 方法

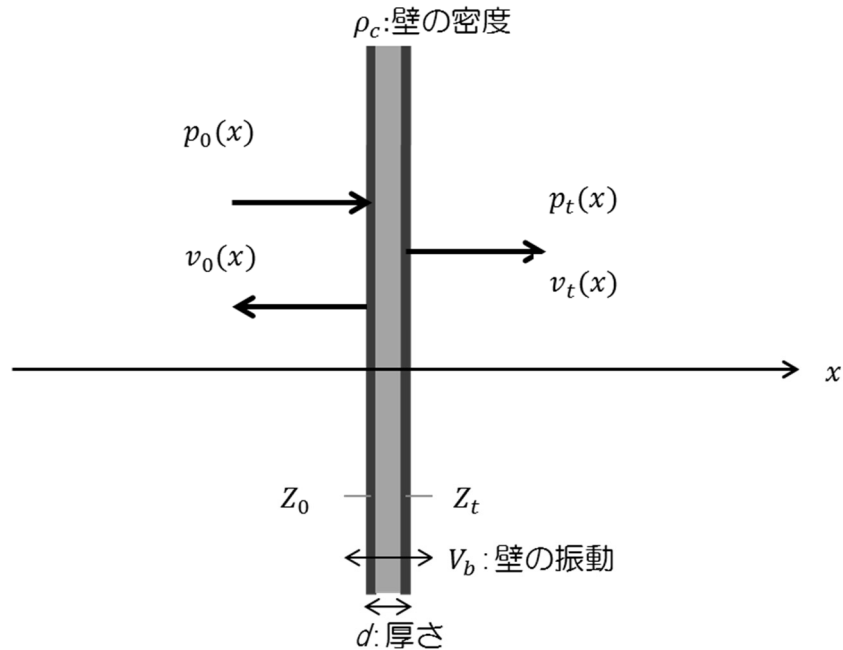


図 19 剛でない壁の理論モデル

次に剛でない壁について検証する。まず、FDTD 法による数値解と比較するために解析解 [5][6] を考える。ここでは透過率 τ について比較する。剛でない壁の理論モデルを図 19 に示す。入射側の音圧を p_0 、粒子速度を v_0 、反射波の振幅を R 、波数 k 、空気密度を ρ_0 、音速を c_0 とすると入射側の音圧と粒子速度は

$$p_0(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx} \quad (29)$$

$$v_0(x) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (e^{ikx} - Re^{-ikx}) \quad (30)$$

となる。透過側の音圧を p_t 、粒子速度を v_t 、振幅を T とすると透過側の音圧と粒子速度は

$$p_t(x) = Te^{ikx} \quad (31)$$

$$v_t(x) = \frac{T}{\rho_0 c_0} e^{ikx} \quad (32)$$

となる。また、厚さを d 、壁の密度を ρ_c 、壁の振動を V_b とすると運動方程式は

$$\rho_c \frac{\partial V_b}{\partial t} = \frac{p_0(0) - p_t(0)}{d} \quad (33)$$

となり、(33)式より V_b は

$$V_b = -\frac{p_0(0) - p_t(0)}{i\omega\rho_c d} \quad (34)$$

となる。境界条件は弾性的に剛と仮定すると

インピーダンスなしのとき

$$v_0(0) = v_b = v_t(0) \quad (35)$$

インピーダンスありのとき、入射側の比音響インピーダンスを Z_0 、透過側の比音響インピーダ

ンスを Z_t として

$$\begin{aligned} v_0(0) &= v_b + \frac{p_0(0)}{Z_0} \\ v_t(0) &= v_b - \frac{p_t(0)}{Z_t} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

インピーダンスなしのときについて(35)式に(30)、(32)、(34)式を代入すると

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} (1 - R) = -\frac{1 + R - T}{i\omega \rho_c d} = \frac{1}{\rho_0 c_0} T \quad (37)$$

となり、ここで $A = \frac{\omega \rho_c d}{\rho_0 c_0}$ とおくと

$$2iA(1 - R) = -1 - R + T = 2iAT \quad (38)$$

(38)式より

$$\begin{aligned} R &= 1 - T \\ -1 - R + T &= 2iAT \end{aligned} \quad (39)$$

となり、 T について解くと

$$T = \frac{1}{1 - iA} \quad (40)$$

となり、透過側の振幅が求まる。透過率を τ として(40)式より透過率 τ を求める。透過振幅が T 、入射振幅が1とすると

$$\tau = \frac{|T|^2}{|1|^2} \quad (41)$$

ここで、 A を戻すと

$$\tau = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega \rho_c d}{2\rho_0 c_0}\right)^2} \quad (42)$$

となる。

次に、インピーダンスありのときについて(36)式に(30)、(32)、(34)式を代入すると

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} (1 - R) = -\frac{1 + R - T}{i\omega \rho_c d} + \frac{1 + R}{Z_0} \quad (43)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} (T) = -\frac{1 + R - T}{i\omega \rho_c d} - \frac{T}{Z_t} \quad (44)$$

(43)、(44)式を連立して T について解くと

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\omega\rho_c d}{2i\rho_0 c_0} + \frac{\omega\rho_c d}{2iZ_t} + \frac{\rho_0 c_0}{2Z_t} + \frac{\omega\rho_c d}{2iZ_0} + \frac{\rho_0 c_0}{2Z_0} + \frac{\omega\rho_c d\rho_0 c_0}{2iZ_0 Z_t}} \quad (45)$$

となり、(45)式より透過率 τ を求めると

$$\tau = \left| \frac{1}{1 + \frac{\omega\rho_c d}{2i\rho_0 c_0} + \frac{\omega\rho_c d}{2iZ_t} + \frac{\rho_0 c_0}{2Z_t} + \frac{\omega\rho_c d}{2iZ_0} + \frac{\rho_0 c_0}{2Z_0} + \frac{\omega\rho_c d\rho_0 c_0}{2iZ_0 Z_t}} \right|^2 \quad (46)$$

となる。よって、数値解は(42)、(46)式と比較する。

FDTD法で解析する際、剛でない壁の透過する音についても考慮するので、壁中の更新式を求める必要がある。連続の式を立てて、体積弾性率を K とおくと

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \frac{\partial u}{\partial x} \quad (47)$$

(47)式より音圧の更新式は

$$p_i^{n+1} = p_i^n - \rho_0 c_0^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (48)$$

運動方程式を立てると

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (49)$$

(49)式より粒子速度の更新式は

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^n - p_i^n) \quad (50)$$

次に壁中の応力 σ と壁中の粒子速度 v_b の更新式を求める。変位を U とするとフックの法則は

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial U}{\partial x} \quad (51)$$

(51)式より応力 σ の更新式は

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + E \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_{b, n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{b, n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (52)$$

となる。

中央にある壁について考える。左側の壁面上について、壁材と空気の間平均密度を ρ_b とすると

$$v_{b, i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{b, i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho_b} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma_{i+1}^n + p_i^n) \quad (53)$$

となり、左側の壁面上の粒子速度が求まる。同様に右側の壁面上の粒子速度は

$$v_{b, i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{b, i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho_b} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\sigma_{i+1}^n + p_i^n) \quad (54)$$

となる。

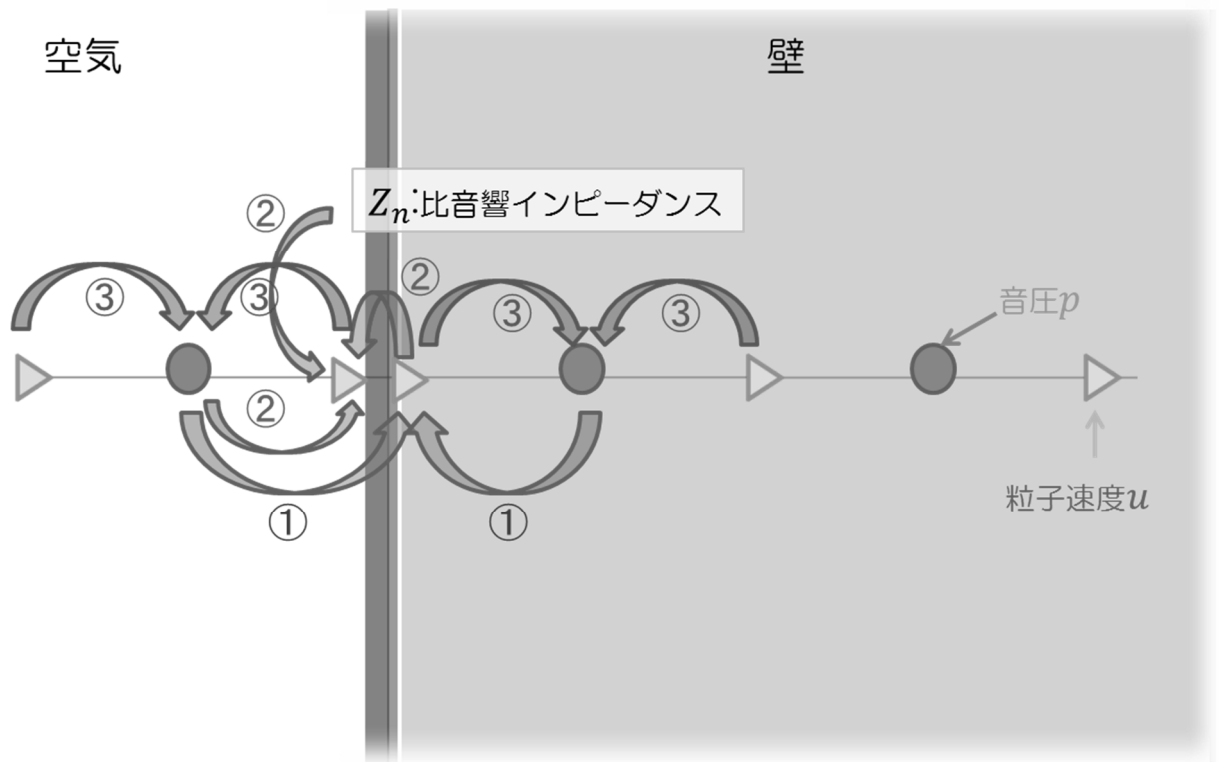


図 20 壁面の更新モデル

壁面の更新のモデルを図 20 に示す。①に示す空気中の音圧と壁中の応力から壁側壁面の粒子速度を更新する。次に②に示すように①の粒子速度と比音響インピーダンスと空気中の音圧から空気側壁面の粒子速度を更新する。そして、③に示すように①と②で求めた値から空気中の音圧と壁中の応力を更新する。以上の手順①から③を繰り返して壁面の音圧と粒子速度を更新する。

3.2.2 条件設定

剛でない壁のモデルを図 21 に示す。

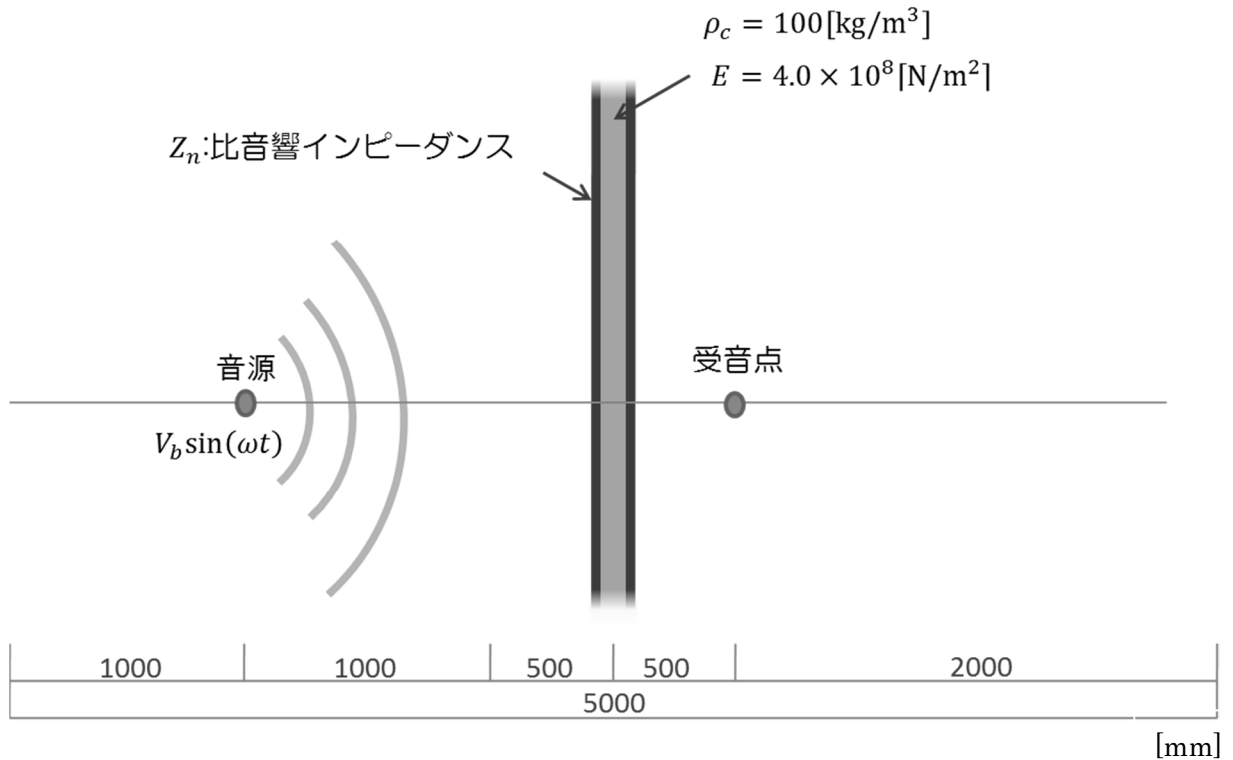


図 21 剛でない壁のモデル図

入力波は $V_b \sin(\omega t)$ 、 $V_b = 1$ 、壁の密度は $\rho_c = 100 \text{ kg/m}^3$ 、ヤング率は $E = 4.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ で周波数 f は 62.5 Hz、125 Hz、250 Hz、500 Hz、1000 Hz のとき、吸音率 α は 0.0、0.2、0.4、0.6、0.8、1.0 のときについて調べる。音圧は半グリッドずれた位置の値を使用し、境界条件は(16)式を使用する。また、壁の透過率を求め(42)、(46)式の解析解と比較する。

3.2.3 結果

剛でない壁の解析解と数値解の比較を図 22 に示す。

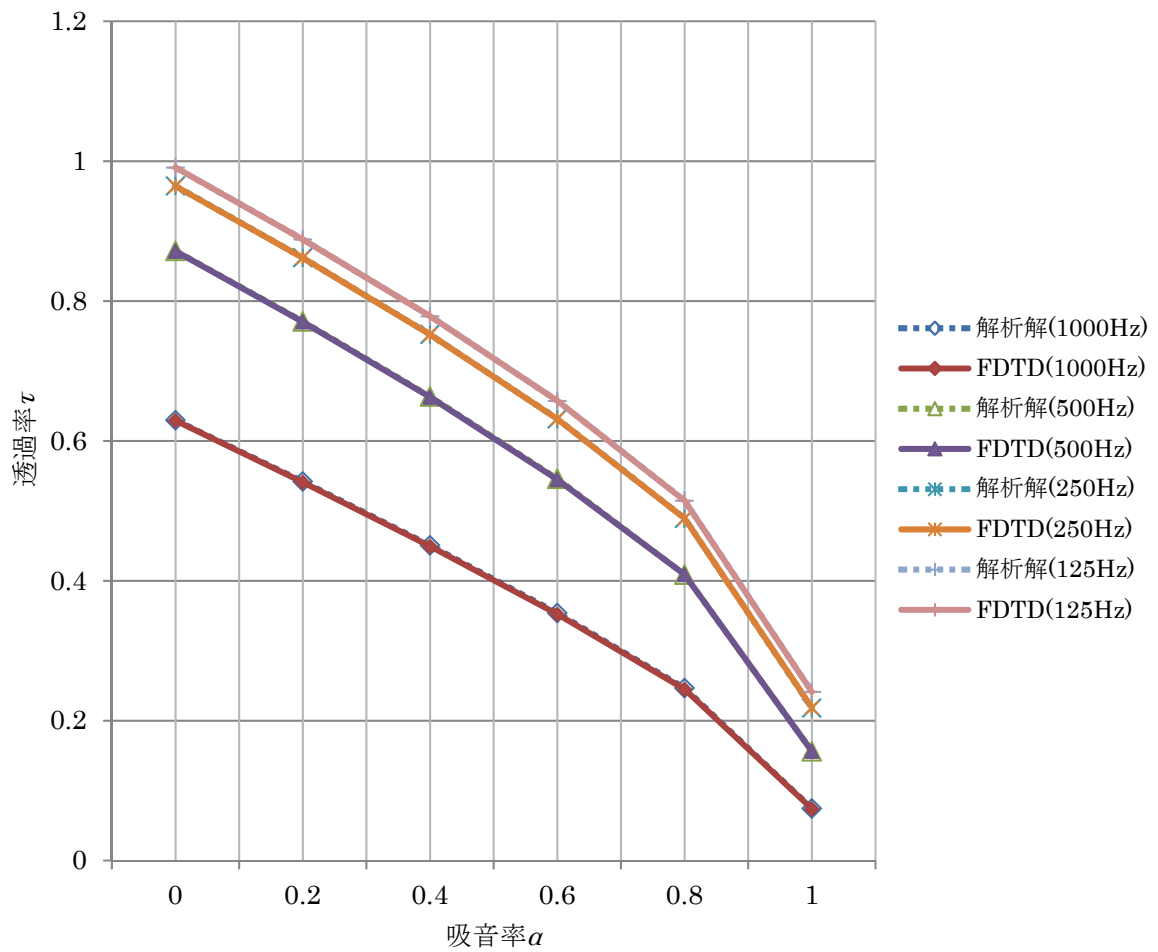


図 22 剛でない壁の解析解と数値解の比較

3.2.4 考察

図 22 のグラフより、いずれの数値解も解析解と同じ値を示しているのがわかる。よって剛でない壁においてもある程度、FDTD 法による結果は正しいと言える。また、62.5 Hz のときの波長が長い為、解析できなかったのがグラフは省略している。

3.3 バネマスを用いた解析

3.3.1 方法

3.2までの理論では、吸音材等が持つ周波数特性を再現できていない。また、壁を押す音圧が正確ではない。これらの問題を解決する手法として参考文献[7]のようなバネとマスとダッシュポットを2つ連続させたものを用いたモデルで解析を行う。ここでは吸音率と透過率、透過損失について比較する。まず、FDTD法による数値解と比較するために解析解を考える。

壁面上について入射音圧を p_i 、反射音圧を p_r とすると音圧 p は

$$p = p_i + p_r = e^{ikx} + R e^{ikx} \quad (55)$$

となる。

ここで、複素音圧反射係数 R を

$$R = a + bi \quad (56)$$

とし、(55)式は

$$p = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} \cos(kx + \delta_1) + i\sqrt{(1-a)^2 + b^2} \cos(kx + \delta_2) \quad (57)$$

となる。同様に粒子速度について解くと

$$v = \frac{\sqrt{(1+a)^2 + b^2}}{\rho_0 c_0} \cos(kx + \delta_3) + i \frac{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}}{\rho_0 c_0} \cos(kx + \delta_4) \quad (58)$$

となる。

振幅を $|p_i| = 1$ とすると粒子速度を v 、入射粒子速度を v_i として $|v_i| = \frac{1}{\rho c}$ になるので

(57)式より

$$|p| = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} \quad (59)$$

(58)式より

$$|v| = \frac{\sqrt{(1+a)^2 + b^2}}{\rho_0 c_0} \cos(kx + \delta_3) \quad (60)$$

となる。

また(59)(60)式より

$$\frac{|p|^2}{|p_i|^2} = (1+a)^2 + b^2 \quad (61)$$

$$\frac{|v|^2}{|v_i|^2} = (1-a)^2 + b^2 \quad (62)$$

となり(61)(62)式を足すと

$$\frac{|p|^2}{|p_i|^2} + \frac{|v|^2}{|v_i|^2} = 2(1 + a^2 + b^2) \quad (63)$$

となる。ここで、吸音率 α は

$$\alpha = 1 - |R|^2 = 1 - (a^2 + b^2) \quad (64)$$

である。

(64)式に(63)式を当てはめると

$$\alpha = 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{|p|^2}{|p_i|^2} + \frac{|v|^2}{|v_i|^2} \right) \quad (65)$$

となる。また、透過率 τ と透過損失 TL については参考文献[5][6]より導く。

3.3.2 条件設定

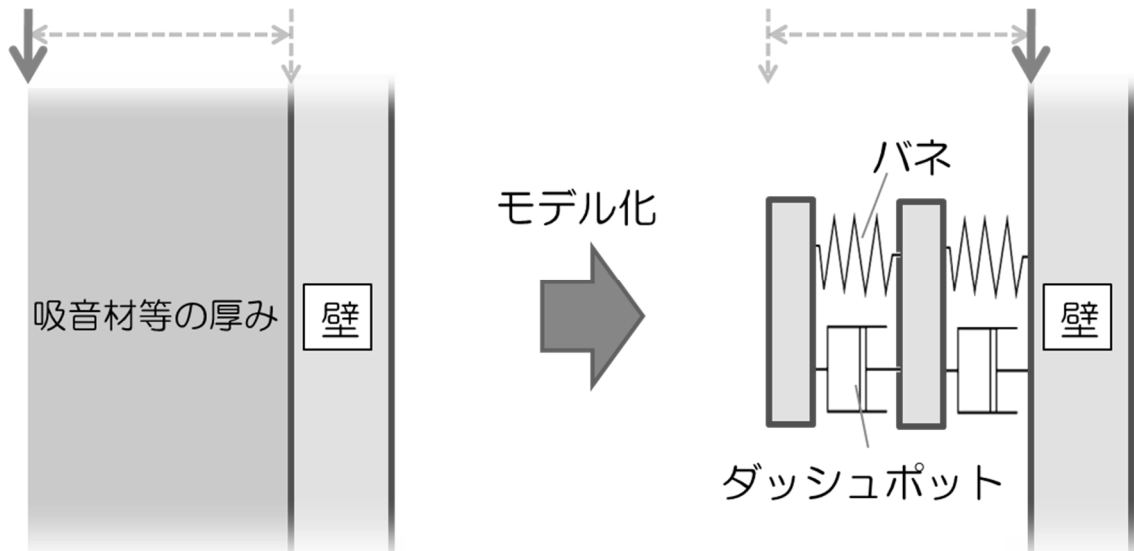


図 23 壁面のバネマスモデル化

剛でない壁のときの入射側壁面を図 23 に示すようなバネとダッシュポットを用いたものに置き換える。

安定条件の都合上、吸音率の検討ときは壁の密度 $\rho_c = 100[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、ヤング率 $E = 4.0 \times 10^8[\text{N}/\text{m}^2]$ 、 $\Delta t = 2.94117 \times 10^{-6}$ 、透過率・透過損失の検討ときは壁の密度 $\rho_c = 600[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、ヤング率 $E = 5.4 \times 10^9[\text{N}/\text{m}^2]$ 、 $\Delta t = 3.333 \times 10^{-7}$ で解析する。定数 $m'_1, c'_1, k'_1, m'_2, c'_2, k'_2$ は参考文献[7]より SetA: $m'_1 = 0.01, c'_1 = 4.0 \times 10^2, k'_1 = 2.3 \times 10^7, m'_2 = 2.4, c'_2 = 1.35 \times 10^4, k'_2 = 1.2 \times 10^8$

SetB: $m'_1 = 0.001, c'_1 = 5.0 \times 10^2, k'_1 = 1.4 \times 10^6, m'_2 = 0.15, c'_2 = 4.5 \times 10^2, k'_2 = 5.0 \times 10^6$

を与える。ただし、吸音率の検討ときは SetA の値を、透過率・透過損失の検討ときは SetB の値を使用している。周波数 f が 200 Hz、400 Hz、600 Hz、800 Hz、1000 Hz、1200 Hz、1400 Hz、1600 Hz のときの入射側と透過側の振幅について調べる。このときの音圧は半グリッドずれた値を使用し、境界条件は(16)式を使用する。また、それぞれの音圧と粒子速度の振幅から吸音率と透過率・透過損失を求め、吸音率は 3.3.1 で得た(65)式と、透過率・透過損失は参考文献[7]より求めた値と比較する。

3.3.3 結果

吸音率の比較を図 24 に示す。

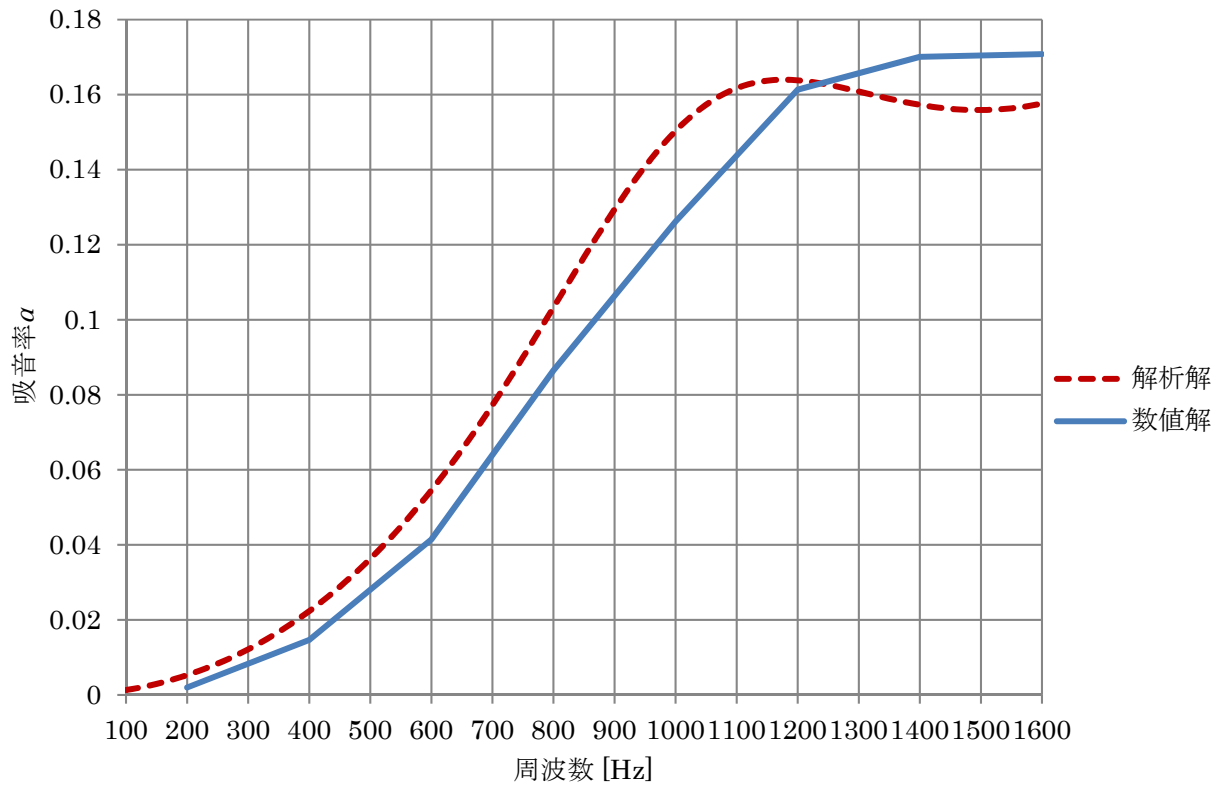


図 24 吸音率の比較

透過率の比較を図 26 に、透過損失の比較を図 25 に示す。

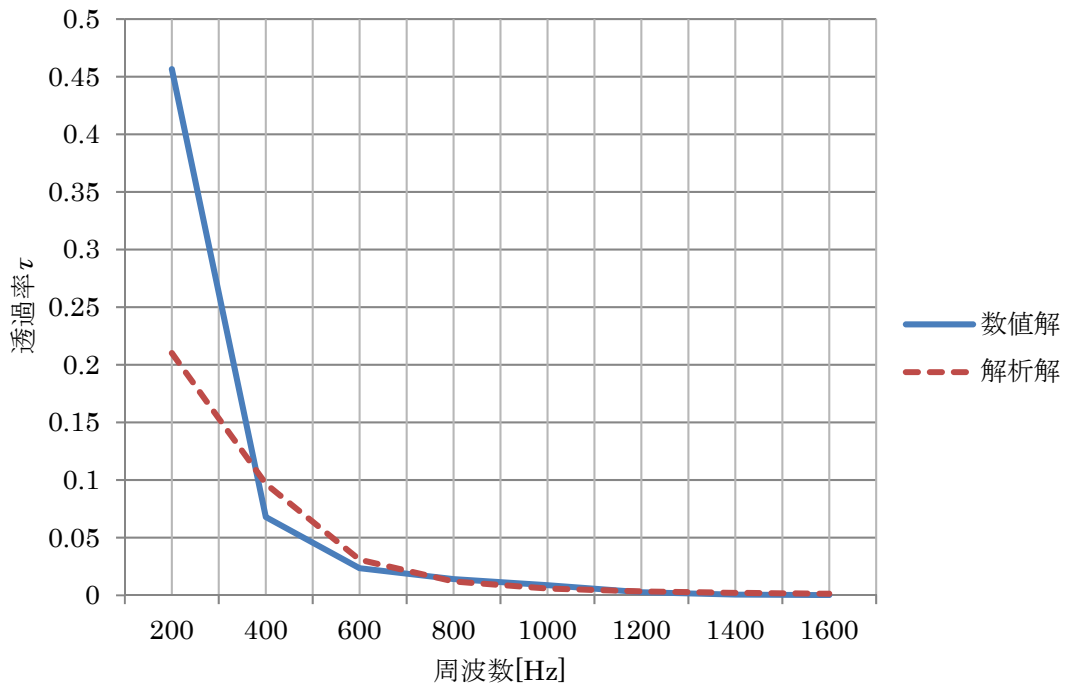


図 26 透過率の比較

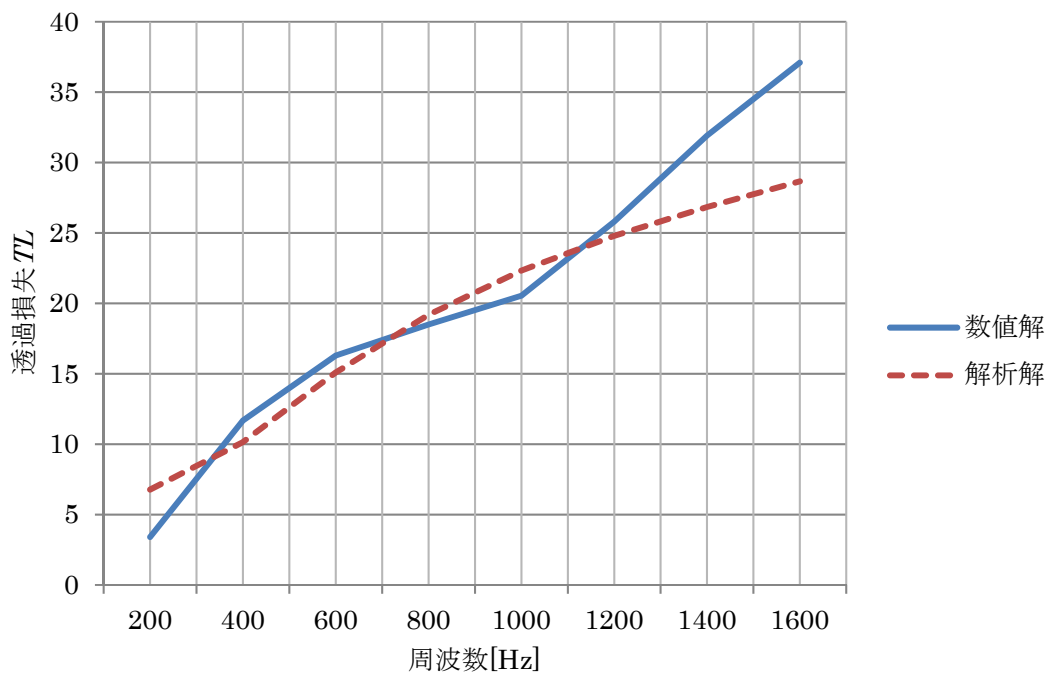


図 25 透過損失の比較

3.3.4 考察

吸音率については図 24 に示すように FDTD 法による解析解と数値解を比較すると全体的に低めのグラフになっているものの近いグラフとなっている。図 25 に示す透過率についても 200 Hz で誤差が大きく見られるが近いグラフであり、図 26 に示す透過損失については 200 Hz 付近を見ると誤差が少ないことがわかる。しかし、1600 Hz 透過損失については逆に誤差が大きいことがわかる。

4 おわりに

本研究では振動音響連成解析用の FDTD プログラムにインピーダンス境界を導入することを目標とし、誤差の検討、剛でない壁面をバネマスに置き換えた解析を行い、以下のことが分かった。

- FDTD 法においても垂直入射吸音率 α と比音響インピーダンス Z_n の関係は成り立つ。
- 周波数による誤差は、ほぼ関係ない。
- 粒子速度と半グリッドずれた位置の音圧を使用する誤差は無視できるほどに小さい。
- バネマスを用いた手法は少なからず誤差は見られるが、いずれの数値解も解析解に近い妥当な結果が得られた。

今後の課題としてはバネマスの後壁面も振動する場合の解析等が挙げられる。また、このような問題点を修正していくことで FDTD 法による数値解と解析解の誤差がより小さくなると考える。

参考文献

- [1] 日本建築学会, 音環境の数値シミュレーション-波動音響解析の技法と応用-
- [2] Philip M. Morse and K. Uno Ingard, "THEORETICAL ACOUSTICS", PRINCETON
- [3] Masahiro Toyoda, Daiji Takahashi, "Prediction for architectural structure-borne sound by the finite-difference time-domain method", Acoust.Sci. &Tech.30, 4, 2009, pages 601-614
- [4] Masahiro Toyoda, Daiji Takahashi, "Reduction of acoustic radiation by impedance control with a perforated absorber system", December 2004, Journal of Sound and Vibration 286, pages 601-614
- [5] D. Takahashi, "Sound transmission through single plates with absorptive facings", J.Acoust.Soc.Am.83(4), 1988, pages 1453-1457
- [6] D. Takahashi, "Sound transmission through single plates with absorptive facings: Improved theory and experiment", J.Acoust.Soc.Am.88(2), 1990, pages 879-882
- [7] Shinichi Sakamoto, Hiroshi Nagatomo, Ayumi Ushiyama and Hideki Tachibana, "Calculation of impulse responses and acoustic parameters in a hall by the finite-difference time-domain method", Acoust.Sci. &Tech.29, 4, 2008, pages 256-265

謝辞

研究を進めるにあたり、お忙しい中数々のご指導ご鞭撻を頂いた豊田政弘先生には熱くお礼申し上げます。また、ご協力いただいた建築環境工学第一研究室の先輩や同期の皆様にも大変お世話になりました。心よりお礼申し上げます。